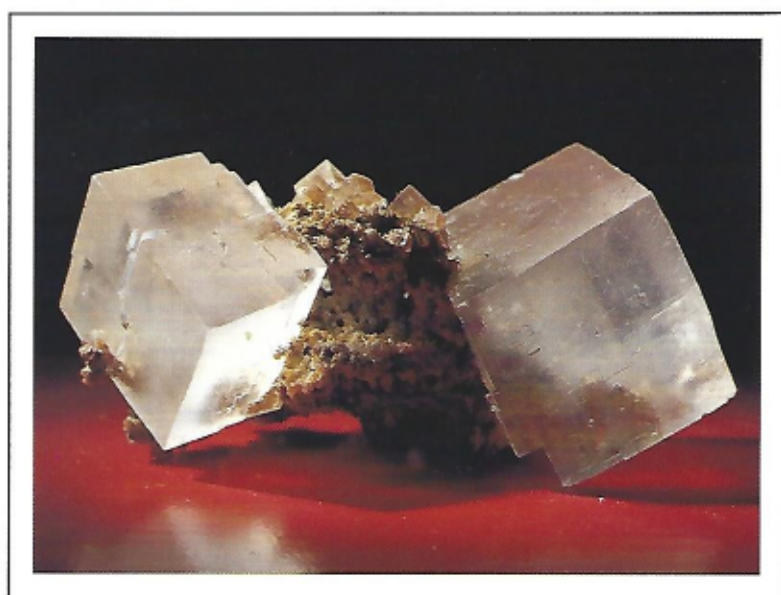


DOMENICO PAGANO

LEZIONI DI CRISTALLOGRAFIA

Cristallografia morfologica

a cura di Vincenzo Nasti



GRUPPO MINERALOGICO ROMANO

ROMA 1991

DOMENICO PÀGANO

LEZIONI
DI
CRISTALLOGRAFIA

Cristallografia morfologica

a cura di Vincenzo Nasti

GRUPPO MINERALOGICO ROMANO

ROMA 1991

G.M.R. - Gruppo Mineralogico Romano

Pagano Domenico - Socio G.M.R.

Docente di Scienze presso

l'Istituto Tecnico Commerciale S. Botticelli - Roma

Nasti Vincenzo - Socio G.M.R.

Collaboratore per la Didattica del G.M.R.

Supplemento fuori commercio al n. 18 del Notiziario
del G.M.R. " IL CERCAPIETRE ".

Comitato di Redazione:

Linossi Giovan Battista

Ruali Paolo Maria

Lini Massimo

Pucci Roberto

Veste tipografica:

a cura di Linossi Giovan Battista

Stampato dalla Tipografia:

Aldo Vagnoni - Roma

Foto di Copertina:

Salgemma

PRESENTAZIONE

La pubblicazione delle " Lezioni di Cristallografia " del Socio Prof. Domenico Pagano, profondo conoscitore delle scienze mineralogiche, mi consente di porgere, anche a nome del Consiglio Direttivo e di tutti i Soci del Gruppo Mineralogico Romano, un doveroso ringraziamento all'autore e al Socio Vincenzo Nasti, per l'impegno profuso nel lavoro di curatore, e consente il rispetto di un impegno preso nei confronti dei lettori della Rivista " Il Cercapietre ".

Inoltre, mi offre l'opportunità di manifestare il convincimento che la Cristallografia, con le sue leggi e i suoi strumenti conoscitivi, rappresenta una validissima base per una evoluzione qualitativa della nostra cultura mineralogica.

Massimo Lini
Presidente del G.M.R.

PREFAZIONE

Ho accolto con molto piacere l'invito del Socio Vincenzo Nasti a pubblicare la raccolta delle lezioni di cristallografia morfologica, da me tenute, nel 1979 e 1980, presso la sede del G.M.R.

L'opera presenta le nozioni di base necessarie per lo studio della cristallografia geometrica e indispensabili per ulteriori approfondimenti nel campo strutturalistico e delle proprietà fisiche e chimiche dei cristalli.

Sperando che questa mia modesta fatica possa servire da stimolo al lettore e suscitare un sempre maggiore interesse per la Cristallografia, ringrazio il Presidente e il Consiglio Direttivo del G.M.R. che hanno permesso la pubblicazione dell'opera e in particolare il curatore Vincenzo Nasti per l'impegno e la tenacia profusa nel compimento del suo non facile lavoro.

Domenico Pagano

LA CRISTALLOGRAFIA

Definizione e cenni storici

La Cristallografia è la scienza dei cristalli; essa studia la formazione, l'accrescimento, la forma esterna, le proprietà fisiche e chimiche della materia cristallizzata (cristallografia macroscopica) e la struttura interna (cristallografia microscopica o strutturale) delle sostanze solide naturali e artificiali.

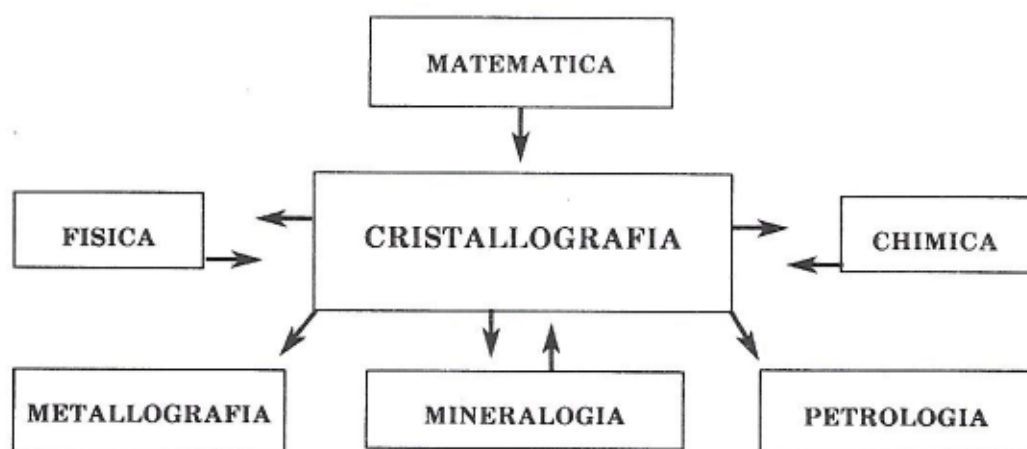
Fin dalla sua origine, la Cristallografia ha sempre fatto parte della Mineralogia di cui costituisce la premessa indispensabile.

Dalla fine del XIX secolo è diventata una scienza indipendente con leggi e metodi di indagine propri. Molte sono le cause che hanno determinato il suo distacco dalla Mineralogia. Tra queste cause si possono annoverare, principalmente, le seguenti: molte sostanze, sia naturali che artificiali, che non hanno niente in comune con i minerali, possono assumere forme cristalline e tali forme sono molto diffuse in natura; inoltre i cristalli possiedono proprietà caratteristiche e specifiche.

Naturalmente la Cristallografia si serve del contributo delle altre scienze sperimentali oltrechè di quelle matematiche. Più precisamente: impiega metodi di varie branche della matematica (geometria analitica e descrittiva, analisi, calcolo delle matrici, teoria dei gruppi, ecc.).

Reciproci scambi esistono, tra Essa, la Fisica, la Chimica, la Mineralogia. Contribuisce, infine, allo studio dei metalli e delle leghe ed allo studio della Petrologia.

Lo schema sottoriportato mostra i rapporti tra la Cristallografia e le altre Scienze suindicate.



Si può distinguere: una Cristallografia matematica (morfologica e strutturale), una Cristallografia fisica (Cristallofisica), una Cristallografia chimica (Cristallochimica).

La parola "*cristallo*" deriva dal greco e risulta formata da due radici: *kryos* = freddo e *stellesthai* = solidificare. Il termine "*krystallos*", poi, servì, nell'antichità, per indicare specificamente, il cristallo di rocca, fino all'epoca di STENONE. Si pensava, infatti, che il quarzo derivasse da cristalli di ghiaccio che avrebbero acquistato una forma particolare a bassa temperatura e conservato tale forma a temperatura ambiente.

La Cristallografia morfologica e strutturale prende l'avvio dalle indicazioni di I. KEPLERO (1619) e R. HOOKE (1665) i quali furono i primi a formulare ipotesi sulla costituzione dei cristalli.

Secondo questi Autori, le sostanze cristalline sarebbero il risultato dell'ordinamento regolare di elementi sferici. Ma merito di V. BIRINGUCCIO (1530) l'aver intuito, di N. STENONE (1669) e di D. GUGLIELMINI (1688) in particolar modo, l'aver formulato la prima legge della Cristallografia, ossia la legge della costanza dell'angolo diedro. Nel 1690 C. HUYGHENS formulava l'ipotesi che la Calcite fosse costituita da particelle ellissoidiche di rotazione, schiacciate secondo la direzione parallela a quella dell'asse ternario del romboedro.

Un contributo importante, nella descrizione dei cristalli si deve a M. N. CAPPELLER (1723): nei suoi scritti compare, per la prima volta, la parola "Cristallografia". Ma la prima opera in cui il termine "cristallo" appare nel significato odierno, "*Essai de Cristallographie*" di J. B. ROMÉ DE LISLE. In essa sono descritti ed illustrati un gran numero di cristalli sia naturali che artificiali (1772). Nella seconda edizione dell'opera (1783) ROMÉ DE LISLE distingue, nei cristalli, forme primitive e forme derivate: le prime, aventi le forme delle molecole integranti che sarebbero di sei tipi diversi (tetraedro, cubo, ottaedro, parallelepipedo romboidale, ottaedro romboidale,

dodecaedro a facce triangolari) con angoli tra le facce della forma primitiva che variano da specie a specie. La forma primitiva, inoltre, può variare per troncature in corrispondenza dei vertici e degli spigoli; ma una caratteristica rimane costante ed invariabile in ciascuna specie: l'angolo tra le facce (angolo diedro).

Viene così enunciata, in maniera esplicita e generale, la legge della costanza dell'angolo diedro (espressa, come già precedentemente accennato, con la stessa esattezza, da D. GUGLIELMINI, nello studio di alcuni sali).

Il goniometro ad applicazione compare, in questo periodo, per merito di CARANGÉOT (1782) allievo di ROMÉ DE L'ISLE.

Nel 1773, T. BERGMANN pubblica un lavoro sulle forme cristalline della Calcite, della Tormalina e del Granato, nel quale sono chiaramente espresse le idee sviluppate successivamente dall'abate R.J. HAÛY. L'osservazione che i cristalli di Calcite si sfaldano secondo direzioni ben determinate e che da essi è possibile estrarre un nucleo romboedrico, convince R.J. HAÛY (1801) a considerare la struttura intima dei cristalli determinante per il loro aspetto macroscopico e a cercare, di conseguenza, il legame tra tale struttura e le facce che essi possono presentare, ossia, in ultima analisi, tra il nucleo e la forma esterna del cristallo.

Sorge, così, la teoria della forma primitiva e dei decrementi regolari delle molecole integranti, per spiegare la formazione di facce diversamente orientate rispetto a quelle della forma primitiva. Conseguenza diretta di questa teoria è la possibilità di definire la posizione di ciascuna faccia del cristallo, nello spazio, mediante tre numeri razionali. HAÛY giunge, così, a formulare la legge della razionalità che costituisce, insieme alla legge della costanza degli angoli diedri, la base su cui poggia tutta la costruzione della moderna Cristallografia.

Nella sua lunga attività di studioso che va dal 1780 al 1822 l'Abate HAÛY giunse ai suoi meriti anche quelli riguardanti i metodi di rappresentazione grafica dei cristalli, basati sulla geometria descrittiva.

C.S. WEISS (1804) annuncia il principio della vettorialità per le proprietà delle sostanze cristalline, introduce il concetto di asse cristallografico e quello di zona (complesso di facce parallele ad una stessa direzione), esprime in forma più efficace la legge fondamentale scoperta da HAÛY ed effettua il primo tentativo di sistematica delle forme cristalline (1815) distinguendo le forme oloedriche e quelle emiedriche. Va inoltre ricordato, come, sempre in base ai lavori di WEISS, siano state fissate le proprietà delle zone e le condizioni di tautozonalità.

Al suo allievo, F.E. NEUMANN (1823) è dovuta l'applicazione delle proiezioni sferiche ai cristalli e la convenienza di sostituire alle facce le rette normali nelle operazioni di calcolo cristallografico. A.F. MOHS (1822) deve essere riconosciuta la priorità dell'uso degli assi cristallografici inclinati, per i cristalli del monoclinio e del triclino, oltre ai molti altri studi per i quali è forse più noto (coesione molecolare e durezza).

Al suo discepolo C.F. NAUMANN (1826) poi riconosciuta la priorità della classificazione dei cristalli in sette sistemi.

Molto importante, per lo sviluppo successivo della Cristallografia l'opera W.H.MILLER (1839) "*A treatise on crystallography*" dove si fa uso dei simboli oggi adottati per gli elementi morfologici e della proiezione stereografica.

La disposizione simmetrica degli elementi dei cristalli non era certo sfuggita ai cristallografi del secolo XIX, ma il concetto di simmetria era limitato solo alla conoscenza dei piani di simmetria.

La sistemazione definitiva, dopo un tentativo fatto nel 1829 dal GRASSMANN, dovuta a J.F.C. HESSEL (1830) il quale, introducendo il concetto di asse di simmetria, dimostra l'esistenza di 32 possibili combinazioni di elementi di simmetria, nei cristalli, dal punto di vista morfologico.

A. BRAVAIS (1849) riconosce, successivamente ed indipendentemente, l'esistenza di 31 classi (quella mancante viene trovata due anni dopo). Anche il russo A.GADOLIN (1867) giunge agli stessi, identici risultati di HESSEL e di BRAVAIS, usando la proiezione stereografica.

Lo sviluppo successivo delle operazioni di simmetria viene raggiunto parallelamente alle ricerche sulle strutture delle sostanze cristalline.

M.L.FRANKENHEIM (1835,1842,1856) ed A.BRAVAIS (1850) studiano le strutture reticolari compatibili con la simmetria macroscopica. Si giunge così ai 14 tipi di reticoli aventi la simmetria delle classi oloedriche dei sette sistemi cristallografici.

Nel 1867, L.SOHNCKE, introducendo nuovi elementi di simmetria caratteristici del discontinuo (assi di simmetria con traslazione) perviene alla determinazione della esistenza di 65 tipi diversi di reticolati in grado di giustificare l'esistenza di quasi tutte le 32 classi di simmetria stabilite da Hessel.

Il completamento della teoria generale della struttura dei cristalli è dovuto al mineralogista E. FEDOROV (1885) ed al matematico A. SCHOENFLIES (1891), indipendentemente l'uno dall'altro.

Infatti, ulteriori operazioni di simmetria (slittopiani) aggiunte a quelle introdotte dal SOHNCKE, permettono di dimostrare l'esistenza di 230 tipi di strutture (gruppi spaziali) che possono essere ridotti alle 32 classi di HESSEL, eliminando le operazioni caratteristiche del discontinuo (traslazioni).

Anche l'idea che le particelle materiali situate nei nodi reticolari dei cristalli possano essere atomi è stata espressa dal SOHNCKE (1880); ma solo nel 1904 P. GROTH riprende e sviluppa questo concetto che risulta, poi, confermato dal metodo d'indagine fisica successiva.

La Cristallografia

La Cristallografia fisica prende inizio dalla scoperta della rifrazione doppia nello spato d'Islanda, da parte di E. BERTHELESEN (Erasmus Bartholinus) nel medesimo anno (1669) in cui NILS STENSEN (STENONE) stampa, a Firenze, il libro "*De solido intra solidum naturaliter contento, dissertationis prodromus*" in cui viene stabilita la costanza dei diedri per i cristalli di quarzo. Uno studio più completo del fenomeno della birifrazione è dovuto a C. HUYGHENS (1690), che stabilisce le leggi della propagazione della luce, la forma delle superfici d'onda e riconosce la birifrazione anche nel quarzo.

Lo studio approfondito dei fenomeni ottici relativi ai cristalli ha inizio solo a partire dal XIX secolo, quando già erano state stabilite le basi della Cristallografia morfologica.

Fondamentale, per l'ottica dei cristalli, è la scoperta della polarizzazione della luce, dovuta a F.L. MALUS (1610). L'esame dei colori di interferenza delle lamine sottili di cristalli, allo scopo di stabilire la birifrangenza è opera di L. ARAGO (1811) e di D.BREWSTER (1812).

Si susseguono ininterrottamente, nel secondo e terzo decennio del secolo, gli studi, soprattutto, di ottica cristallografica.

I cristalli monoassici vengono distinti da quelli biassici; attivi, in questo campo, sono J.B. BIOT (1812-1815) e D. BREWSTER (1813). Quest'ultimo, nel 1818, compie un primo tentativo per trovare una corrispondenza tra le proprietà ottiche e quelle morfologiche.

J.F.W. HERSCHEL (1820) descrive per primo la dispersione degli assi ottici nei cristalli biassici.

Fondamentali sono, poi, le ricerche di A.J. FRESNEL (1820-1827) sull'ottica cristallografica, che costituiscono, ancora oggi, il fondamento per una trattazione organica dei fenomeni di propagazione della luce nei cristalli; concetti come "superficie d'onda", "indicatrice ottica", sono comuni ed impiegati correntemente nella interpretazione delle proprietà ottiche dei cristalli.

F.E. NEUMANN (1832-1835) riconosce la coincidenza degli assi principali dell'indicatrice ottica, con gli elementi di simmetria del gruppo trimetrico.

Il fenomeno della polarizzazione rotatoria nel quarzo, viene osservato, per la prima volta da L. ARAGO (1811) e successivamente studiato da J.B. BIOT.

Lo studio delle altre proprietà fisiche dei cristalli in generale è posteriore a quello dei fenomeni ottici. L'esame della elettrizzazione dei cristalli risale già ad HAUY, il quale, addirittura, cerca di utilizzare tale proprietà per il riconoscimento delle gemme.

Sulla conducibilità termica dei cristalli, sono fondamentali gli studi di H. DE SENARMONT (dal 1847 al 1850). Ad A. FIZEAU (1865) sono dovute le misure sulla dilatazione termica e la dimostrazione che, in analogia con le proprietà ottiche, si possono dedurre le variazioni prodotte dalla temperatura a partire da un ellissoide a tre assi.

La piroelettricità, già nota ad HAÛY, è studiata da RIESS e ROSE (1843), mentre le relazioni tra questo fenomeno e gli elementi morfologici sono stabiliti, più tardi, da G. HANKEL e dopo gli studi di RÖNTGEN (1882).

La piezoelettricità stata osservata, nel 1880 dai coniugi G. e P. CURIE.

Fenomeni quali "sfaldatura" e "durezza" hanno attirato assai presto l'attenzione degli studiosi, come si detto precedentemente. Ricerche più precise, in merito, vengono effettuate da M.L. FRANKENHEIN (1829) a proposito delle variazioni della durezza in tutte le direzioni di una medesima faccia cristallina.

L'introduzione dello sclerometro da parte di SEEBECK, GRAILICH e PEKAREK, nel 1854, permise misure più accurate di tale proprietà e rese possibile la costruzione, da parte di EXNER (1873), delle curve di durezza per le facce principali di un grande numero di cristalli.

Più complessa risulta la ricerca sulle proprietà elastiche dei cristalli, campo affrontato da W. VOIGT, allievo di NEUMANN; egli ha dimostrato che anche queste proprietà sono collegate con la simmetria dei cristalli, essendo possibile individuare una superficie vettoriale legata a coefficienti determinabili sperimentalmente.

Nei vari campi della Cristallografia, numerose ricerche sono state effettuate nella seconda metà del secolo scorso, ma, come nel caso della morfologia, esse hanno avuto un indirizzo analitico e sono state dirette ad approfondire argomenti particolari. In questo periodo si comincia a prestare maggiore attenzione ai cristalli prodotti artificialmente. La Cristallografia si distacca, progressivamente dalla Mineralogia ed utilizzando sempre più efficacemente i metodi della Fisica e della Chimica, diventa una scienza indipendente.

L'ultimo periodo della storia della Cristallografia ha inizio nel 1912, quando il fisico M. LAUE riesce a dimostrare sperimentalmente l'esattezza della teoria reticolare.

Da lunghi anni, infatti, non era stato possibile trovare una giustificazione sperimentale della teoria reticolare dei cristalli, tanto che alcuni studiosi cominciavano a mettere in dubbio tale teoria e molti di essi evitavano addirittura di parlare di essa nei loro lavori.

Dopo la scoperta, da parte di W. RÖNTGEN (1895) dei raggi X, i fisici si dividono in due gruppi distinti riguardo alla natura di queste radiazioni: per alcuni, esse sono di natura ondulatoria, per altri invece di tipo corpuscolare. Non possibile per provarne la natura ondulatoria in quanto nessun tipo di reticolo usato per la radiazione luminosa in grado di produrre fenomeni di diffrazione, quando viene attraversato dai raggi X.

LAUE decide di usare come reticolo di diffrazione un cristallo e l'esperienza, condotta su un cristallo di blenda, da W. FRIEDRICH e P. KNIPPING, suoi collaboratori, prova allo stesso tempo, sia la natura ondulatoria delle radiazioni, che la natura reticolare dei cristalli.

In seguito a tale scoperta, numerosi fisici utilizzano i raggi X per studiare la struttura dei cristalli. Vengono perfezionati e usati nuovi metodi di indagine da parte di W.H. BRAGG e W.L. BRAGG e G.WULF (1913-1914), di DEBYE e SCHERRER (1916) con il metodo delle polveri, di POLANJ (1921) e WEISSENBERG (1924) con il metodo del cristallo rotante ed il metodo del cristallo oscillante. Contributi importanti alla Cristallografia e alle caratteristiche strutturali dei cristalli vengono dati da M.BORN (1915) e da HUND (1925) e da POLANJ (1922).

Non è possibile, d'altronde, citare in una breve rassegna come questa tutti i contributi dei vari ricercatori impegnati, fino ad oggi, nei campi dell'indagine, con metodi di fisica delle sostanze cristalline.

Ci si è limitati a citare solo quegli Autori che hanno maggiormente contribuito con le loro opere allo sviluppo e al progresso della scienza Cristallografica.

La Cristallografia

La conoscenza ed i progressi sulla composizione dei minerali vanno di pari passo con gli inizi e con lo sviluppo della Chimica inorganica.

Sarebbe troppo lungo seguire le varie tappe di tale sviluppo in una rassegna necessariamente limitata alla storia dello studio delle relazioni tra le proprietà chimiche delle sostanze cristalline naturali ed artificiali e le loro forme e proprietà fisiche generali.

Basterà ricordare la diffusione nell'analisi chimica dei cristalli naturali, dei metodi di analisi per via secca sviluppati principalmente dal chimico svedese A.F.V. CRONSTED e l'analisi quantitativa di alcune gemme eseguite da T.O. BERGMAN (1777). Già precedentemente M.A. CAPPELLER (1723) aveva rappresentato svariate forme cristalline non esistenti in natura e riconosciuta l'importanza della Cristallografia per la Chimica.

Descrizioni di prodotti chimici cristallizzati sono contenute nelle opere di ROMÉ DE LISLE e nominati anche da HAÛY.

L'uguaglianza di forme cristalline di alcuni minerali di composizione analoga (carbonati, solfati, ecc.) era già stata osservata dallo stesso HAÛY e da altri, ma spiegata in maniera artificiosa ed arbitraria. J.N. FUCHS (1815), analizzando i cristalli di gehlenite, osservava una sostituzione scambievole di ferro e calcio, ritenendo possibile l'esistenza di varietà nelle quali tutto il ferro fosse sostituito dal calcio. Non si può negare che in tali concetti si trovi abbozzata la teoria dell'isomorfismo sviluppata, successivamente, da E. MITSCHERLICH (1820), basata sulla osservazione delle forme cristalline dei sali degli acidi arsenico e fosforico, in cui viene dimostrata l'indipendenza della forma cristallina dalla natura chimica.

Allo stesso Autore è dovuto anche lo studio del polimorfismo fenomeno per cui una medesima sostanza può cristallizzare in forme diverse. Infatti è dovuta a MITSCHERLICH la dimostrazione che lo zolfo, a seconda delle condizioni fisiche, poteva cristallizzare in forme totalmente differenti (1823). Le idee del MITSCHERLICH furono il punto di partenza di molte ricerche di cristallografia chimica continuate per tutto il secolo scorso ed oltre, le quali, anche se non portarono ad una chiarificazione dei problemi, spesso addirittura complicandoli, accumularono, di fatto, una quantità di dati, sempre più accurati ed esatti, per la conoscenza dei cristalli, non solo naturali ma anche artificiali.

Numerosi lavori, riguardanti l'isomorfismo e il polimorfismo, sono dovuti a numerosi chimici, tra i quali spiccano i nomi di F. WÖHLER e R. BUNSEN.

Non vanno dimenticati, infine, i mineralogisti italiani A. SCACCHI e Q. SELLA. Il primo, per gli studi sulla cosiddetta "polisimetria" e per gli studi sui minerali del Vesuvio; il secondo, per numerosi lavori di chimica cristallografica.

Negli ultimi decenni del secolo scorso, P. GROTH e la sua scuola hanno studiato il fenomeno della "morfotropia", ossia la variazione regolare della forma cristallina con il variare regolare della composizione chimica.

Risultati importanti si sono avuti nello studio chimico-fisico dell'isomorfismo e del polimorfismo, come nella formazione dei cristalli misti e nelle relazioni tra costituzione chimica, costituzione fisica e strutture reticolari.

In questi ultimi campi si distinguono i lavori di E. FEDOROV, V. M. GOLDSCHMIDT, L. PAULING, A. E. FERSMAN e molti altri Autori.

La Cristallografia morfologica

La Cristallografia morfologica, insieme a quella strutturale, rappresenta la necessaria premessa allo studio degli altri due rami della Cristallografia: quella fisica e quella chimica.

Alla base di essa figurano, come del resto per le altre branche della Scienza, concetti e leggi fondamentali.

I concetti, o se si vuole, le definizioni fondamentali sono quelle di sostanza cristallina, individuo o corpo cristallino, cristallo.

Dal punto di vista macroscopico la sostanza cristallina è caratterizzata, rispetto alla sostanza amorfa, da anisotropia almeno rispetto ad una proprietà fisica vettoriale⁽¹⁾: ossia, tale proprietà deve variare il suo valore con il variare della direzione nell'interno della sostanza.

(1) Una grandezza fisica vettoriale è caratterizzata dal numero che ne misura la quantità e dalla direzione. Essa è rappresentabile con segmento orientato, detto vettore.

Le sostanze non cristalline o amorfe sono, invece, sempre isotrope rispetto a qualsiasi proprietà fisica vettoriale: ciò tali proprietà fisiche non variano il loro valore con il variare della direzione nell'interno della sostanza stessa.

Dal punto di vista strutturale, poi, le particelle costituenti le sostanze cristalline o "leptoni" (atomi, ioni, molecole), occupano punti dello spazio formanti un reticolo tridimensionale. Si ripetono, cioè, con periodicità costante, in tutte le direzioni dello spazio.

Le sostanze amorfe sono caratterizzate, invece, da disposizioni casuali dei leptoni, mentre alcune sostanze, dette mesomorfe (2), hanno ordinamento secondo una o due direzioni spaziali.

L'individuo o corpo cristallino si può definire come una porzione definita di sostanza cristallina; mentre la definizione di cristallo tiene conto, soprattutto, dell'aspetto geometrico della superficie che delimita il corpo cristallino.

Un cristallo va dunque definito come *un individuo o corpo cristallino avente forma poliedrica convessa delimitata da facce generalmente piane*.

I monocristalli presentano sempre forme poliedriche convesse, prive, cioè di angoli diedri rientranti. La presenza di questi ultimi dà origine a forme poliedriche concave, caratteristiche delle associazioni di più individui e cioè tipiche delle associazioni parallele e dei geminati. In teoria, esistono infiniti poliedri convessi, differenti per numero di vertici, di spigoli e di facce.

Per tutti, vale la regola di EULERO: *la somma del numero delle facce e di quello dei vertici è sempre uguale a quello degli spigoli più due*:

$$f + v = s + 2$$

Tra gli infiniti poliedri convessi, solo cinque sono quelli regolari: quelli, cioè, che hanno tutte le facce formate da poligoni regolari uguali, che hanno tutti gli angoli diedri uguali, e che hanno tutti gli angoloidi uguali.

Un angolo diedro la parte di spazio compresa tra due piani che si intersecano (nel caso del cristallo, l'angolo tra due facce).

L'angoloide è la porzione di spazio compresa tra tre o più semirette uscenti da un punto. Esistono i triedri, se le semirette sono tre, i tetraedri, se le semirette sono quattro, i pentaedri se le semirette sono cinque, e così via.

Queste condizioni restrittive sono soddisfatte soltanto dalle seguenti forme poliedriche: tetraedro, ottaedro, icosaedro (aventi rispettivamente 4, 8, 20 facce di triangoli equilateri), cubo o esaedro (avente sei facce quadrate) e pentagonododecaedro (avente 12 facce di pentagoni regolari). v. Fig. 1.

(2) La dizione proposta nel 1922 da G. FRIEDEL si applica alle sostanze organiche distinte in nematiche, smettiche, colesteriniche ed a struttura fibrosa.

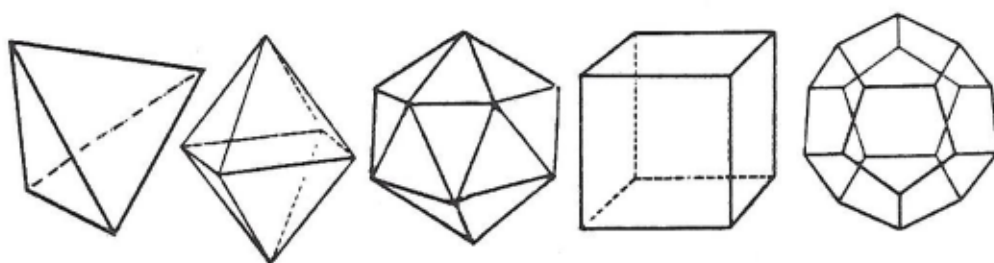


Fig. 1

Un poliedro avente le facce di esagoni regolari sarebbe impossibile, in quanto scomparirebbero gli angoloidi e la figura verrebbe a coincidere con una superficie piana.

Accostando, infatti, degli esagoni regolari, non è possibile ottenere angoloidi nello spazio (in ogni vertice, la somma degli angoli delle facce a contatto uguale a 360° , cioè ad un angolo giro e, quindi, ad una superficie piana). v. Fig. 2

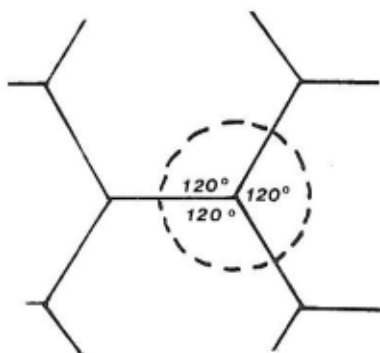


Fig. 2

Tra le infinite forme poliedriche convesse, teoricamente possibili, i cristalli assumono solo quelle che soddisfano alle leggi della Cristallografia.

Delle cinque forme poliedriche regolari, l'icosaedro ed il pentagonododecaedro non seguono tali leggi e, pertanto, i cristalli non presentano mai tali forme geometriche.

Un solido cristallino, dunque, si distingue da un solido geometrico, perchè quest'ultimo non è vincolato dalle leggi della Cristallografia.

Si può, in definitiva, affermare che tutti i solidi cristallini sono anche solidi geometrici, mentre, il contrario non è sempre vero.

Le leggi fondamentali della Cristallografia

La prima legge fondamentale della Cristallografia è la legge della costanza degli angoli diedri: *"a temperatura e pressione costanti, i cristalli di una medesima specie possono assumere forme molto diverse secondo il numero e le dimensioni delle loro facce, ma queste facce formano tra loro sempre lo stesso angolo diedro"*.

Le grandezze fisiche "temperatura" e "pressione" possono influire, con le loro variazioni, sui valori degli angoli diedri, dato il comportamento anisotropo dei cristalli.

La legge, enunciata per la prima volta da STENONE (1669), è la conseguenza dell'osservazione della presenza di un numero limitato di facce sui cristalli e della tendenza delle facce stesse a spostarsi parallelamente in seguito al fenomeno dell'accrescimento. La costanza degli angoli tra le facce di un cristallo è stata osservata da STENONE sul quarzo e sulla ematite.

Più tardi ROMÉ DE LISLE (1783) ha mostrato che la legge della costanza degli angoli diedri è valida per tutte le specie di cristalli. La legge permette di ricostruire idealmente dal cristallo non proporzionato il cristallo modello, spostando parallelamente le facce. In un cristallo modello, infatti, tutte le facce che appartengono alla stessa forma semplice presentano lo stesso sviluppo areale (per la definizione di "forma semplice cristallina" vedasi oltre).

La misura degli angoli diedri viene effettuata con strumenti detti "goniometri". Questi, vengono distinti in "goniometri ad applicazione" (Fig.3 - CARANGEOT, 1772) e "goniometri a riflessione" (Fig.4 - WOLLASTON, 1809) o "goniometri ottici". In essi si misura l'angolo delle normali alle facce (Fig.5). Inoltre, si distinguono "ad un cerchio" (W.H.MILLER, 1874) e "a due cerchi" già proposto dal MILLER (1878), contemporaneamente riproposto da tre distinti ricercatori: FEDOROV (1889), GOLDSCHMIDT (1893) e CZAPSKI (1893). Oggi, i goniometri a due cerchi graduati o teodolitici, altamente perfezionati, sono di larga applicazione e vengono usati per misure sia su piccolissimi che su grandi cristalli.

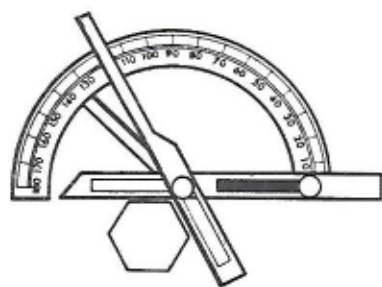


Fig.3

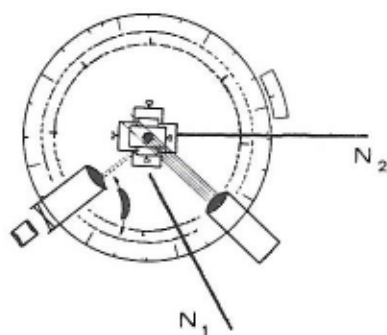


Fig.4

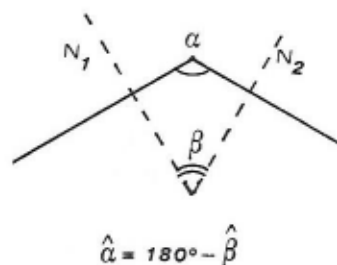


Fig. 5

La rappresentazione dei cristalli

Sono possibili vari modi di rappresentazione dei cristalli utilizzando metodi geometrici. I più noti sono rappresentati da quelli prospettici, assonometrici e proiettivi. Questi ultimi sono indubbiamente i più usati. Le rappresentazioni mediante proiezioni impiegate comunemente sono quelle stereografiche e gnomoniche. Mediante tali proiezioni si mettono in risalto i valori e le posizioni relative degli angoli diedri; inoltre, per la legge della costanza degli angoli diedri, le proiezioni delle forme sproporzionate e di quelle modello, coincidono e possono effettuarsi calcoli grafici relativi alle costanti caratteristiche del cristallo, mediante opportuni reticoli.

Premessa indispensabile per effettuare sia la proiezione stereografica che quella gnomonica, è la proiezione sferica. In questa proiezione le facce del cristallo sono rappresentate da punti situati sulla superficie di una sfera concentrica (poli delle facce) ottenuti per intersezione delle normali alle facce del cristallo con la superficie della sfera di proiezione (Fig.6).

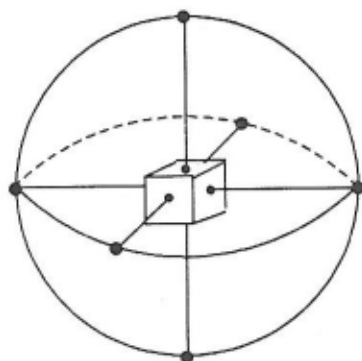


Fig. 6

Gli angoli formati dalle diverse normali sono i supplementari degli angoli diedri delle facce corrispondenti.

Ogni polo, inoltre, può essere individuato sulla sfera, da un sistema di coordinate sferiche (latitudine e longitudine) come per i punti situati sulla superficie della Terra. La latitudine viene comunemente misurata a partire dal Polo Nord e non dall'Equatore. Essa varia da 0° a 180° e viene chiamata "distanza polare" (ρ).

La longitudine (φ) viene contata a partire da un meridiano fondamentale come avviene sulla Terra (Fig.7).

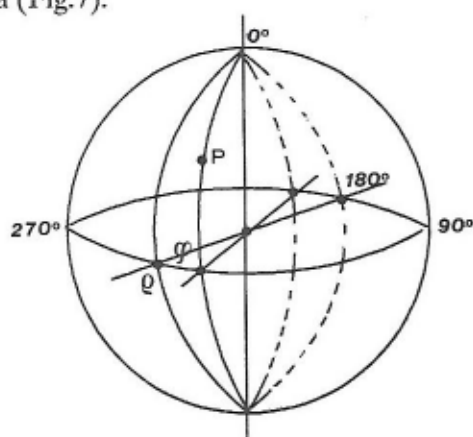


Fig. 7

Dai poli sulla sfera si può passare con procedimenti diversi ai poli situati su un piano detto "piano di proiezione".

Nella proiezione gnomonica, il piano di proiezione è un piano tangente alla sfera e il centro di proiezione o "punto di vista" si trova al centro della sfera.

Le semirette uscenti dal centro della sfera e passanti per i poli delle facce intersecano il piano tangente determinando i poli gnomonici.

In questo tipo di proiezione i poli situati all'equatore vengono a proiettarsi all'infinito (Fig.8), risultando le semirette parallele al piano di proiezione.

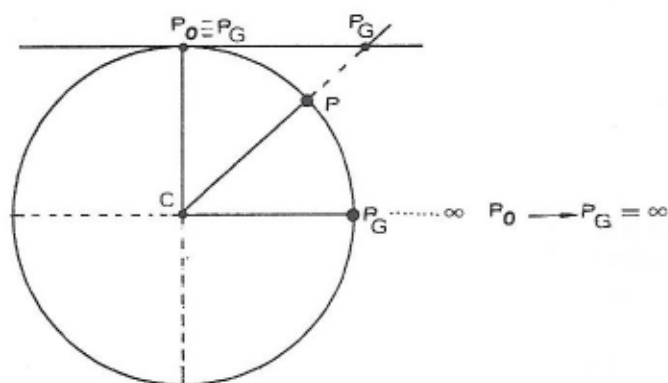


Fig. 8

I poli di queste facce non compaiono, quindi, nella proiezione gnomonica.

Al contrario i poli situati in prossimità del polo Nord della sfera e rappresentanti facce poste alla sommità del cristallo, sono ben distanziati e i loro angoli facilmente misurabili graficamente.

Nella proiezione stereografica, il piano di proiezione passa per il centro della sfera (piano equatoriale) e il centro di proiezione o punto di vista rappresentato da uno dei poli opposti rispetto al piano equatoriale.

Tutti i poli delle facce situati sulla sfera, vengono proiettati sul piano equatoriale e formano i poli stereografici.

I poli situati sul cerchio equatoriale si proiettano negli stessi punti, ossia polo sferico e polo stereografico coincidono (Fig.9).

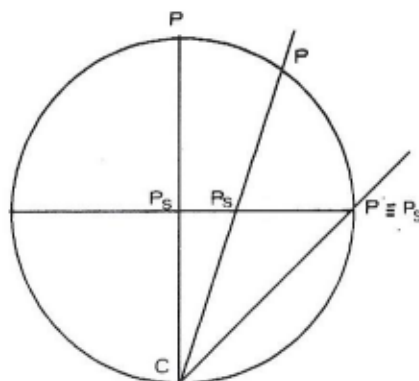


Fig. 9

La proiezione stereografica gode delle seguenti proprietà che sono importanti per la rappresentazione grafica dei cristalli.

I - la proiezione stereografica di un cerchio tracciato sulla superficie della sfera è rappresentato sempre da un cerchio.

II - l'angolo formato da due archi di cerchio massimo sulla sfera è uguale all'angolo compreso tra gli archi che rappresentano la proiezione stereografica di questi archi di cerchio massimo.

I vantaggi di tale proiezione sono evidenti soprattutto per le facce del cristallo i cui poli sulla sfera sono prossimi al cerchio equatoriale. Meno chiaramente separati rispetto alla corrispondente proiezione gnomonica, risultano, invece i poli delle facce situate in vicinanza del polo Nord della sfera.

La preferenza per l'una o per l'altra proiezione varia a seconda delle Scuole cristallografiche.

Nel presente lavoro si farà riferimento alla proiezione stereografica, attualmente più diffusa.

Di grande utilità per i calcoli grafici relativi alle posizioni delle facce dei cristalli sono i reticoli stereografici.

Essi si ottengono proiettando sul piano stereografico una rete di meridiani e di paralleli tracciati sulla superficie sferica ad intervalli determinati.

L'orientamento della superficie sferica rispetto al piano di proiezione determina il tipo di reticolo.

I reticoli più usati sono: il reticolo polare (Fig.10) e quello equatoriale o di WULFF (Fig.11).

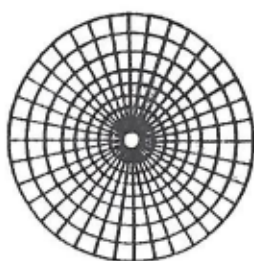


Fig.10

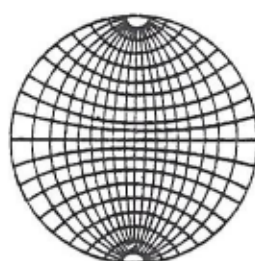


Fig.11

Il primo è comodo per riportare le misure espresse sotto forma di coordinate sferiche e il secondo, con divisioni di 2 gradi, permette di misurare gli angoli compresi tra due punti qualsiasi interni al reticolo, problema, quest'ultimo, molto importante per la Cristallografia e non risolvibile usando il reticolo polare.

Il reticolo di Wulff può sostituire completamente tale reticolo, permettendo di risolvere qualsiasi problema di calcolo grafico con l'approssimazione di circa un grado. Ad esempio, è possibile non solo rappresentare le facce del cristallo, date le loro coordinate sferiche, ma anche il tracciamento delle zone a cui appartengono i vari poli delle facce e degli assi di zona, dell'angolo tra le zone, degli elementi di simmetria, ecc., per citare soltanto i problemi più comuni,

Per tutte queste operazioni si usa, generalmente, un reticolo di 20 cm di diametro e fogli di carta trasparenti (o da lucidi), ad esso sovrapposti, sui quali vengono riportati i poli.

La legge della costanza della simmetria

La simmetria è la caratteristica essenziale dei cristalli e costituisce la base del loro studio sistematico. In generale per simmetria si intende una determinata corrispondenza di posizione che si osserva tra oggetti diversi o parti dello stesso oggetto sia nel piano che nello spazio. Per simmetria cristallina, in particolare, deve intendersi il complesso delle operazioni geometriche che permette di passare da un elemento caratteristico del cristallo (faccia, spigolo, vertice, proprietà fisica) ad un altro elemento omologo.

Gli enti geometrici che permettono queste operazioni si chiamano elementi di simmetria o elementi ideali del cristallo.

Le operazioni di simmetria possono raggrupparsi in due tipi fondamentali:

1) *Operazioni congruenti o di I tipo che implicano il movimento effettuato mediante rotazione rispetto ad un asse (asse di simmetria o girico) o mediante traslazione secondo una determinata direzione.*

2) *Operazioni incongruenti o di II tipo che comprendono la riflessione rispetto ad un piano (piano di simmetria) e l'inversione che si effettua rispetto ad un punto (centro di simmetria).*

Sono possibili inoltre operazioni combinate di I tipo come le rototraslazioni e di I e II tipo come rotoriflessioni (assi giroidi), le rotoinversioni (assi di inversioni) e le riflessotraslazioni (slittopiani).

SCHEMA DELLE OPERAZIONI DI SIMMETRIA E DEGLI ELEMENTI CORRISPONDENTI

CONGRUENTI I TIPO	INCONGRUENTI II TIPO	MISTE I TIPO	MISTE I E II TIPO
ROTAZIONE (Assi di simmetria) GIRICI	RIFLESSIONE (Piano di simmetria)	ROTAZIONE + TRASLAZIONE (Assi elicogiri)	ROTAZIONE + RIFLESSIONE (Assi giroidi)
			ROTAZIONE + INVERSIONE (Assi d'inversione)
TRASLAZIONE	INVERSIONE (Centro di simmetria)		TRASLAZIONE + INVERSIONE (Slittopiani)

Le operazioni interessanti i gruppi finiti di elementi e quindi i poliedri cristallini sono rappresentate dalle rotazioni, dalle riflessioni, dall'inversione e dalle loro combinazioni. Mentre, invece, a queste operazioni vanno aggiunte le traslazioni nel caso di gruppi infiniti di elementi.

Operazioni di rotazione

Questa operazione viene effettuata rispetto ad un asse detto asse di rotazione o giro. Sono possibili nei cristalli soltanto assi che permettono il riconoscimento degli elementi (geometrici o fisici) per rotazione di 360° , 180° , 120° , 90° , 60° .

Essi vengono indicati con i simboli:

A₁, A₂, A₃, A₄, A₆, oppure con 1, 2, 3, 4, 6, (secondo la convenzione internazionale). Lo schema seguente illustra in prospettiva e in proiezione la serie degli assi:

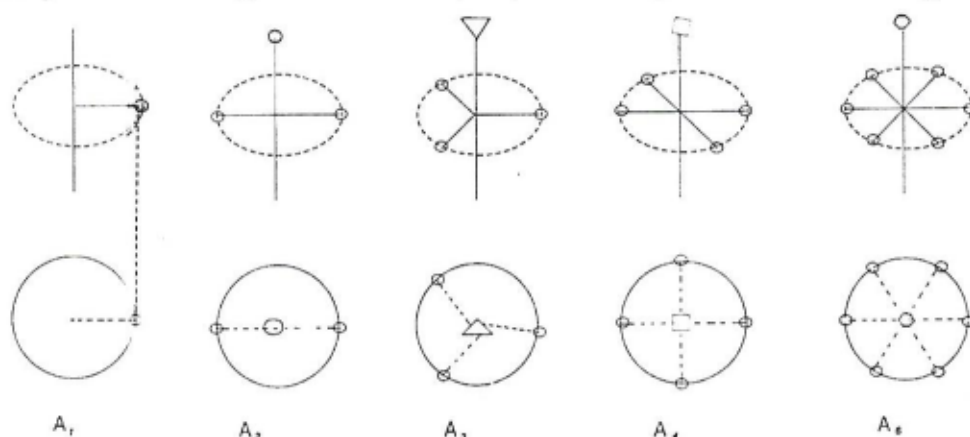


Fig. 12

Gli assi di simmetria presenti nei cristalli possono essere singoli o combinati tra loro secondo determinate leggi a cui si accennerà successivamente.

Dal punto di vista puramente geometrico sono possibili poliedri che presentano operazioni di rotazione di ordine diverso (A₅ ecc.) ma, come è stato accennato precedentemente, non tutti i poliedri geometrici sono necessariamente poliedri cristallini.

Operazioni di riflessione.

Questa operazione si effettua rispetto ad un piano detto piano di simmetria indicato con la lettera P (internazionalmente con $\bar{m}$ dal termine inglese mirror = specchio.) Il piano di simmetria divide, pertanto, gli elementi del cristallo in parti specularmente uguali (Fig. 13).

Su un poliedro cristallino possono presentarsi piani di simmetria singoli, combinati, diversamente orientati, equivalenti o non equivalenti tra loro. (Fig. 16)

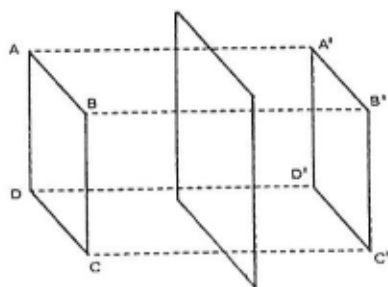


Fig. 13

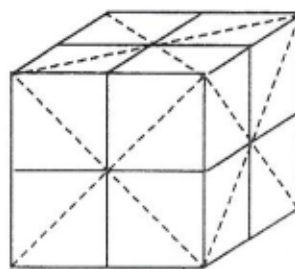


Fig. 14

Operazione di inversione

L'operazione si effettua rispetto a un punto detto centro d'inversione o centro di simmetria indicato con il simbolo C (internazionalmente i oppure $\bar{1}$ rispetto al quale due elementi identici sono equidistanti. Questa operazione non va confusa con la riflessione. (Fig.15)

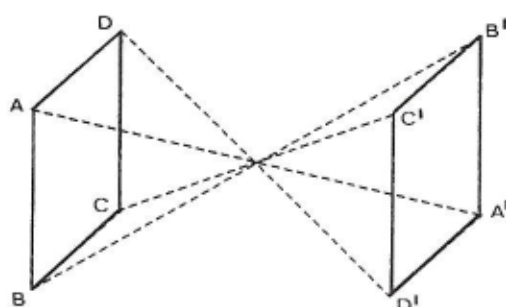


Fig. 15

Operazione di rotoriflessione.

Questa operazione viene effettuata alternando l'operazione di rotazione con l'operazione di riflessione rispetto ad un piano normale all'asse di rotazione che viene chiamato asse giroide e indicato con i simboli $A(1)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(6)$, (internazionalmente $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$). Gli elementi corrispondenti sono situati alternativamente sopra e sotto il piano di riflessione come appare dallo schema sottostante:

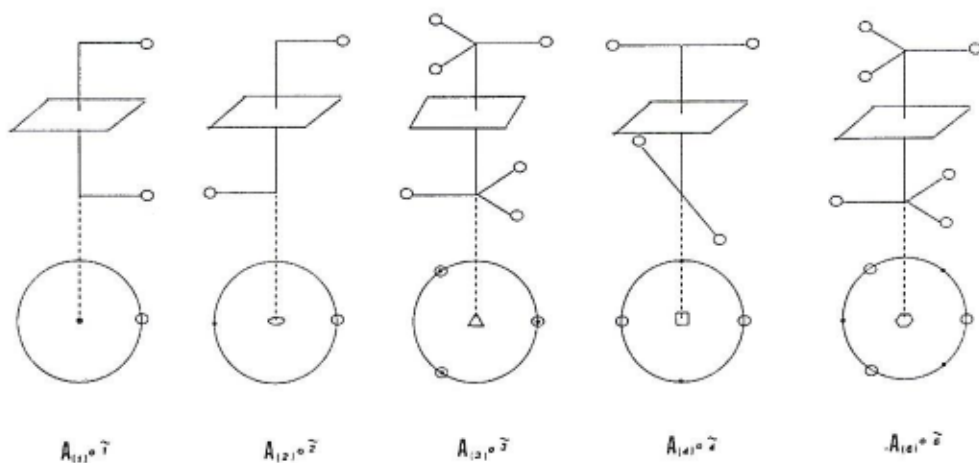


Fig. 16

Operazione di rotoinversione

L'operazione rotazione + inversione si effettua alternando la rotazione con l'inversione rispetto ad un punto situato sull'asse di rotazione. Tale asse, chiamato asse di inversione, viene indicato con i simboli:

$A\bar{1}$, $A\bar{2}$, $A\bar{3}$, $A\bar{4}$, $A\bar{6}$; a seconda del tipo di rotazione (internazionalmente con $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$).

Lo schema seguente mostra gli assi di inversione cristallografici:

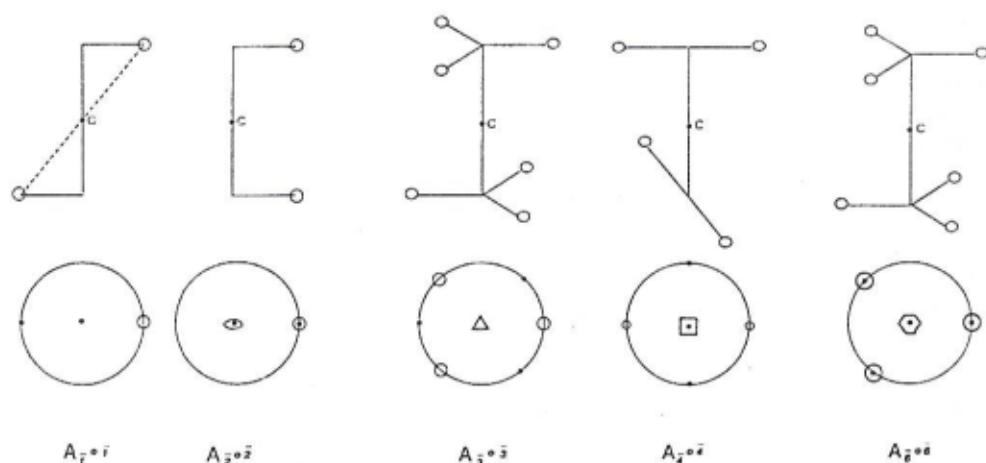
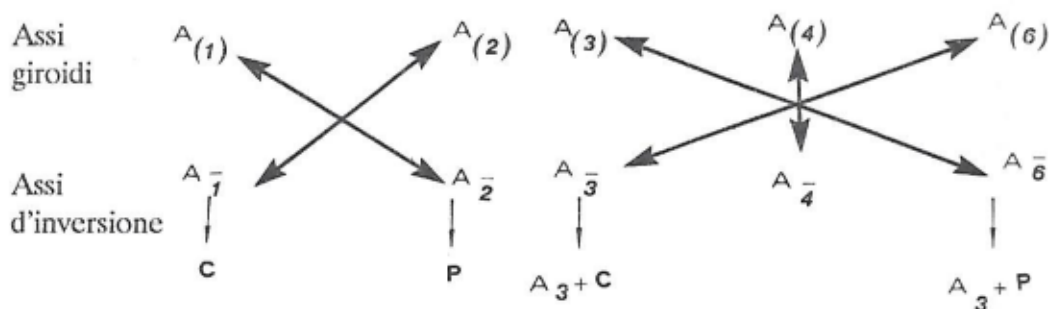


Fig. 17

Dal confronto delle operazioni di simmetria relative agli assi giroidi e a quelli d'inversione, come appaiono dagli schemi surriportati, appare chiaramente l'equivalenza di molte operazioni e la possibilità di ricondurle a operazioni più semplici o a combinazioni di esse effettuate separatamente e in maniera indipendente.

Tutto ciò appare evidente dal seguente schema :

EQUIVALENZE DELLE VARIE OPERAZIONI DI SIMMETRIA



In definitiva, tenendo conto delle equivalenze, le operazioni di simmetria non riducibili ad altre più semplici sono:

- gli assi girici A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_6 ;
- l'asse giroide o di inversione $A(4)$ o $A\bar{4}$;
- il piano di simmetria $\underline{P}$ e il centro di simmetria $\underline{C}$.

In un insieme di elementi finiti e quindi nei poliedri cristallini si trovano queste operazioni isolate o combinate tra loro in base a leggi determinabili per via geometrica o con metodi analitici (teoria dei gruppi finiti di operazioni). Vengono date successivamente le principali regole che rendono possibili le combinazioni degli elementi di simmetria e le relative compatibilità. Le varie combinazioni degli elementi di simmetria costituiscono le classi di simmetria. Esse furono determinate per la prima volta da HESSEL (1830) e confermate successivamente da altri Autori (FÉDOROV, BRAVAIS, WULFF, CURIE, GADOLINE) per vie diverse. Queste possibili combinazioni sono in totale 32.

Poichè le forme poliedriche cristalline presentano elementi ideali e geometrici e proprietà fisiche sui quali sono possibili solo determinate operazioni di simmetria caratteristiche di una data classe, è possibile enunciare per esse la cosiddetta legge della costanza di simmetria:

"A temperatura e pressione costante una determinata sostanza cristallina può assumere solo forme poliedriche i cui elementi di simmetria appartengono ad una delle 32 classi di simmetria".

Vengono riportati i teoremi più importanti in base ai quali è possibile ottenere le varie combinazioni degli elementi di simmetria.

1) Se n piani di simmetria si intersecano, la retta intersezione è un asse di ordine n .

Es. se $n = 2$ l'asse è A_2 e così via. Inoltre gli angoli tra i piani sono necessariamente quelli corrispondenti agli assi girici ossia 360° , 180° , 120° , 90° , 60° . (Fig. 18).

Corollario del teorema precedente è il seguente: se un asse di ordine n è contenuto in un piano di simmetria devono necessariamente esistere n piani che si intersecano lungo l'asse.

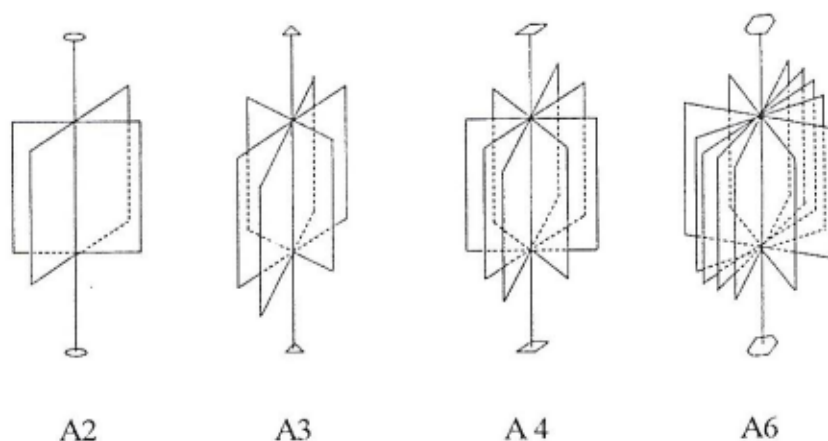


Fig. 18

2) Teorema di EULERO : se esistono due assi di simmetria deve necessariamente esistere almeno un terzo asse formante, con i primi due, angoli determinanti. Effettuando i calcoli per le rotazioni possibili relative agli assi girici si ottengono le seguenti combinazioni:

3 A_2 tra loro perpendicolari;

A_3 , $3A_2$ su un piano perpendicolare all'asse e formanti tra loro angoli di 60° ;

A_4 , $4A_2$ sempre un piano perpendicolare all'asse A_4 e formanti angoli di 45° ;

A_6 , $6A_2$ con angoli di 30° ;

sono ancora possibili le combinazioni $4A_3$, $3A_2$ e $4A_3$, $3A_4$, $6A_2$ le cui posizioni relative sono visibili nella Fig. 19 riferite alla forma poliedrica cubica.

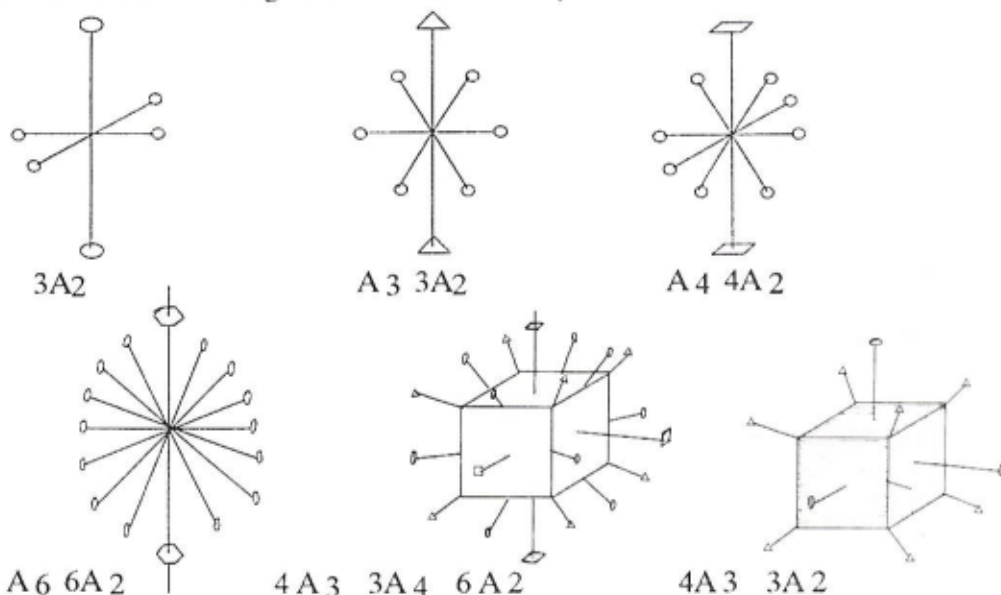


Fig. 19

Un corollario del teorema precedente è il seguente :

se su un piano (che può essere o non un piano di simmetria) esistono n assi di simmetria di ordine pari, la normale al piano è asse di ordine n . La proposizione contraria non è sempre vera; infatti è possibile l'esistenza di assi di simmetria singoli. Se, però, normalmente ad un asse di simmetria di ordine n esiste un asse di simmetria di ordine pari ne devono esistere necessariamente n .

3) Se un asse di simmetria di ordine pari è perpendicolare a un piano di simmetria il punto di intersezione è centro di simmetria. In particolare la presenza di due dei tre elementi (piano, centro e asse di ordine pari) comporta necessariamente la presenza del terzo punto. Se l'asse è dispari sono possibili le combinazioni: asse con centro e asse con piano perpendicolare.

Tenendo presenti questi teoremi è possibile, seguendo vari criteri, ottenere le possibili combinazioni degli elementi di simmetria e dimostrare, quindi, l'esistenza delle 32 classi di simmetria.

Un primo criterio potrebbe essere quello di considerare inizialmente soltanto le operazioni congruenti, ossia gli assi girici e le loro combinazioni per ottenere 11 classi:

$A_1, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_6, \quad 3A_2, \quad A_3 \ 3A_2,$
 $A_4 \ 4A_2, \quad A_6 \ 6A_2, \quad 4A_3 \ 3A_2, \quad 4A_3 \ 3A_4 \ 6A_2.$

Successivamente si introducono le operazioni incongruenti e miste ($A(4), P, C$) per ottenere le altre 21 classi.

Un altro criterio potrebbe consistere nel partire dalle otto operazioni semplici di simmetria ($A_1, A_2, A_3, A_4, A_6, A(4), P, C$) sia congruenti che incongruenti, che singolarmente costituiscono le prime otto classi, e aggiungere successivamente ad ognuna di esse gli elementi di simmetria compatibili in base ai teoremi precedentemente riportati. Infine si può ricorrere alla branca della matematica nota come teoria dei gruppi e più specificatamente alla parte di essa relativa ai sistemi chiusi.

Come è stato accennato precedentemente l'asse di simmetria di ordine 5 e quelli di ordine superiore (escluso A_6) non sono stati considerati nelle combinazioni perché non cristallografici. Bisogna, però, tenere presente che sono possibili combinazioni di simmetria in cui essi compaiono e forme geometriche in cui si ritrovano tali operazioni. Basti pensare all'icosaedro (solido con venti facce di triangoli equilateri) che presenta una simmetria assiale formata da $6A_5, 10A_3, 15A_2$. Infine le 32 classi di simmetria possono essere riunite in sistemi (sei o sette sistemi) in base agli elementi di simmetria comuni tra esse e al sistema di riferimento (assi cristallografici) usato per l'orientamento dei cristalli.

I sistemi vengono poi ripartiti in tre gruppi in base alla scelta delle unità di misura sugli assi cristallografici.

DISTRIBUZIONE DELLE CLASSI IN GRUPPI E SISTEMI

GRUPPI	SISTEMI	NUMERO DELLE CLASSI
MONOMETRICO (isometrico)	CUBICO	5
DIMETRICO	TETRAGONALE	7
	ESAGONALE	5
	TRIGONALE	7
TRIMETRICO	ROMBICO	3
	MONOCLINO	3
	TRICLINO	2

Orientamento dei cristalli e legge della razionalità degli indici.

Per potere indicare la giacitura degli elementi reali di un cristallo è necessario fissare un sistema di riferimento. Questo è costituito solitamente da tre rette intersecantisi in un punto detto origine (assi cristallografici). In alcuni casi (sistemi esagonale e trigonale) si introduce un quarto asse conplanare con due delle tre direzioni.

Gli assi vengono indicati con x, y, z , e sono orientati: x verso l'osservatore, y da sinistra a destra, z verticalmente; nel complesso essi vengono a costituire una terna cosiddetta levogira. Gli angoli che gli assi formano tra loro sono indicati con le lettere α, β, γ (Fig. 20). Il quarto asse viene indicato con la lettera j e posto nel piano x, y , (Fig. 21).

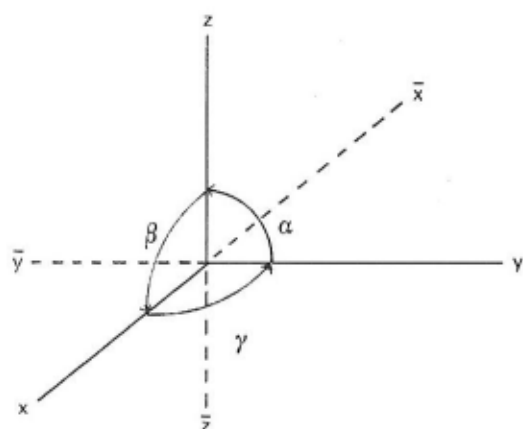


Fig. 20

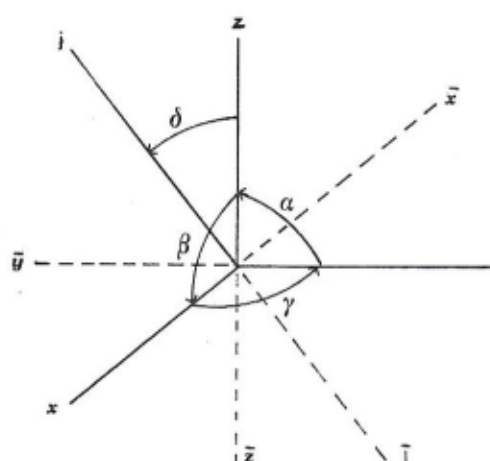


Fig. 21

La posizione di un punto nello spazio (vertice di un cristallo) può essere chiaramente individuata da tre parametri formati dalle coordinate del punto x, y, z ; una retta (spigolo del cristallo) mediante 6 parametri, ossia dalle coordinate di due punti appartenenti alla retta; un piano (faccia del cristallo) da 9 parametri, dato che esso è individuato da tre punti non allineati situati su di esso. Si possono ridurre i 9 parametri a 3 considerando i punti di intersezione del piano con gli assi che staccano sugli assi stessi i segmenti indicati con a, b, c rispettivamente su x, y, z , (Fig. 22).

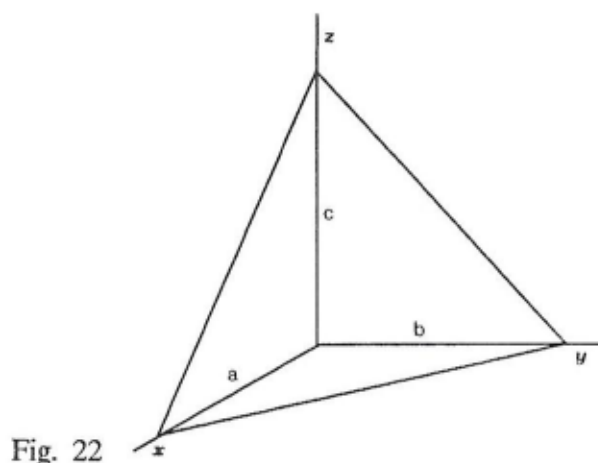


Fig. 22

Se si considera una famiglia di piani paralleli tra di loro caratterizzati dai valori $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$; ecc. (Fig. 23) è facile dimostrare che vale la relazione

$$a : b : c = a' : b' : c' = a'' : b'' : c'' = \dots = \text{costante.}$$

In cristallografia interessa questo rapporto che fissa la giacitura di un piano la quale resta invariata se il piano viene spostato parallelamente. Il calcolo del rapporto parametrico $a : b : c$ si effettua facilmente se si conoscono gli angoli che la normale, condotta dall'origine alla famiglia dei piani paralleli, forma con le direzioni degli assi di riferimento. Infatti dai triangoli OPA, OPB, OPC, con i metodi della trigonometria si può dimostrare che

$$a : b : c = \frac{1}{\cos P\hat{O}X} : \frac{1}{\cos P\hat{O}Y} : \frac{1}{\cos P\hat{O}Z}$$

In definitiva, ogni faccia di un cristallo può essere caratterizzata dal valore del proprio rapporto parametrico (Fig. 24)

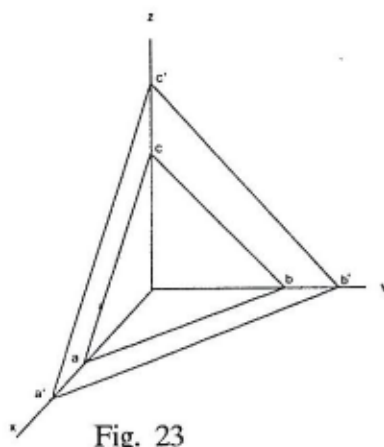


Fig. 23

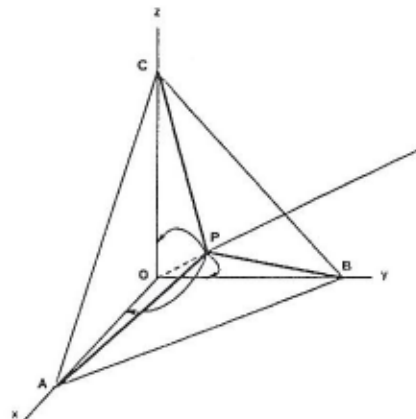


Fig. 24

Trovati i valori dei rapporti parametrici per ciascuna faccia di un cristallo opportunamente orientato è possibile constatare la validità della legge della razionalità degli indici o legge di HAÜY che può essere così enunciata:

Per un determinato cristallo, scelto il sistema di riferimento e una faccia che incontri tutti gli assi come faccia fondamentale (sistema di unità di misura), i rapporti tra il rapporto parametrico della faccia fondamentale e il rapporto parametrico di una qualsiasi altra faccia stanno tra loro secondo numeri razionali riconducibili quindi a numeri interi generalmente piccoli.

Questi numeri si indicano generalmente con h, k, l , e rappresentano gli indici della faccia e il simbolo della faccia stessa se chiusi tra parentesi tonda: (hkl) . Gli indici della faccia fondamentale si ottengono dividendo il rapporto parametrico per se stesso, per cui il risultato è per qualsiasi cristallo 1:1:1 e il simbolo della faccia fondamentale (111).

Se una faccia è parallela ad uno o due assi il parametro corrispondente è infinito (∞) e l'indice è uguale a zero. Gli indici, infatti, per definizione sono inversamente proporzionali ai rispettivi parametri:

$$\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} : \frac{c}{c_1} = h : k : l.$$

La scelta del sistema di riferimento viene effettuata in modo che le direzioni degli assi coincidano con quelle degli assi di simmetria o con le normali ai piani di simmetria. Nei cristalli appartenenti a classi con scarsi elementi di simmetria si presenta la possibilità di scelta tra vari orientamenti.

In tal caso gli assi di riferimento si fanno coincidere con le direzioni di tre spigoli uscenti da una vertice del cristallo rispettando le seguenti regole:

1 - gli angoli α, β, γ uguali o il più possibile vicini a 90° ;

2 - la faccia fondamentale deve intercettare sugli assi segmenti con valori numerici molto vicini tra loro quando si verifica la condizione $a \neq b \neq c$.

Se poi, nessuna delle facce del cristallo taglia tutti e tre gli assi cristallografici, si scelgono due facce ciascuna delle quali taglia due assi ed è parallela al terzo. In tal modo con la faccia che taglia l'asse x e l'asse y si può determinare il rapporto $\frac{a}{b}$ e con quella che taglia l'asse y e l'asse z il rapporto $\frac{c}{b}$.

Queste facce hanno per simbolo rispettivamente (110) e (011) e sono chiamate anche facce biunitarie. Se, infine, esiste una sola faccia è impossibile definire il rapporto delle lunghezze unitarie. Si hanno, in definitiva, le seguenti possibilità per i valori degli angoli della terna e il sistema di unità di misura determinato dalla posizione della faccia fondamentale.

<u>Angoli degli assi cristallografici</u>	<u>Unità di misura</u>	<u>Sistema</u>
$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$a = b = c$	cubico
$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$a = b \neq c$	tetragonale
$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$a \neq b \neq c$	rombico
$\alpha = \gamma = 90^\circ \quad \beta \neq 90^\circ$	$a \neq b \neq c$	monoclino
$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	$a \neq b \neq c$	triclino
$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \quad \gamma = 120^\circ$	$a = b \neq c$	esagonale e trigonale

Nel sistema trigonale si può usare anche un riferimento a tre assi con $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ $a = b = c$ e i semiassi positivi orientati verso l'alto (Fig. 25). I valori degli angoli α , β e γ e quelli del rapporto parametrico della faccia fondamentale costituiscono le costanti cristallografiche.

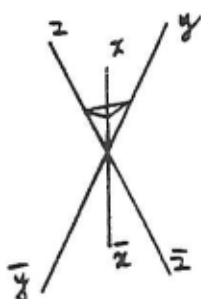


Fig. 25

Legge delle zone cristalline - Relazione tra i simboli delle facce e i simboli degli spigoli.

In Cristallografia per zona si intende *l'insieme delle facce parallele ad una medesima direzione detta asse di zona*. L'asse di zona è, dunque, la retta parallela agli spigoli formati dall'intersezione delle facce della zona. Nella proiezione stereografica i poli di tutte le facce di una zona si trovano su un cerchio massimo. Le zone possono dividersi in primarie (o complete) se tutte le facce che la formano determinano spigoli reali, oppure secondarie (o incomplete) se occorre prolungare idealmente alcune facce per ottenere dalla loro intersezione spigoli possibili i quali sarebbero potuti comparire se il cristallo avesse seguito uno sviluppo diverso. La legge delle zone cristalline afferma:

1 - Ogni piano parallelo a due spigoli reali o possibili di un cristallo è una faccia reale o possibile di questo cristallo.

2 - Ogni direzione parallela all'intersezione di due facce reali o possibili di un cristallo è uno spigolo reale o possibile di un cristallo.

Allo stesso modo delle facce anche gli spigoli e, quindi, gli assi di zona possono essere rappresentati con opportuni simboli. Infatti, una retta passante per l'origine del sistema di riferimento può essere determinata per quanto riguarda la sua direzione dal rapporto delle coordinate di uno dei suoi punti $x : y : z$, che resta costante per tutti i punti della retta. E' sempre possibile, poi, ridurre i termini del rapporto a numeri interi tenendo conto del sistema di unità di misura scelto sugli assi cristallografici. Essi vengono comunemente indicati con le lettere u, v, w (u, v, w nel sistema a quattro assi). Questi numeri o indici chiusi tra parentesi quadra rappresentano il simbolo dello spigolo.

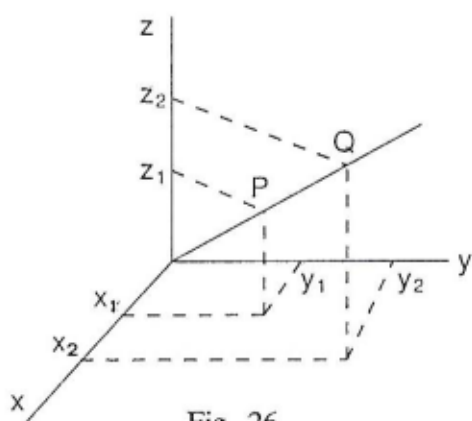


Fig. 26

Simboli degli spigoli

$(x_1 \ y_1 \ z_1)$ coordinate di P

$(x_2 \ y_2 \ z_2)$ coordinate di Q

$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2 = \dots$ costante

ciò vale per tutti i punti che si trovano sulla retta che rappresentano lo spigolo.

Se non si conoscono le coordinate di uno dei punti della retta, il simbolo della retta stessa può essere calcolato partendo dai simboli di due piani che la individuano con la loro intersezione impiegando i metodi della geometria analitica.

Noti i simboli delle facce $(h_1 \ k_1 \ l_1)$ e $(h_2 \ k_2 \ l_2)$ il simbolo dello spigolo da esse formato $u \ v \ w$ si calcola con il metodo seguente :

$$u = k_1 \ l_2 - k_2 \ l_1;$$

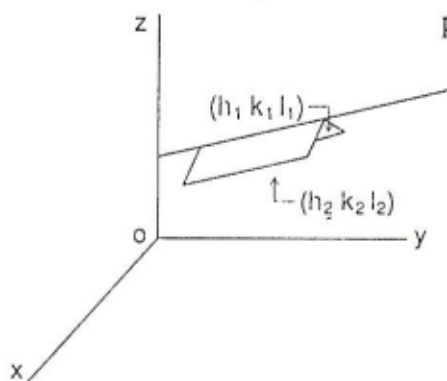
$$v = h_1 \ l_2 - h_2 \ l_1;$$

$$w = h_1 \ k_2 - h_2 \ k_1.$$

Gli indici dello spigolo possono, quindi, ricavarsi dalla matrice formata dagli indici delle facce secondo il seguente schema :

$$\begin{array}{c|ccc|c} h_1 & k_1 & l_1 & h_1 & k_1 & l_1 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ h_2 & k_2 & l_2 & h_2 & k_2 & l_2 \\ \hline & u & v & w & & \end{array}$$

Ossia si calcolano i prodotti degli indici indicati dalle frecce e si sottraggono con quelli indicati dalle frecce opposte.



Le equazioni dei due piani supposti passanti per l'origine, sono :

$$\begin{cases} \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 0 \\ \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} + \frac{z}{c_2} = 0 \end{cases}$$

tenendo conto che valgono le seguenti relazioni :

$$\frac{a}{a_1} = h_1 \quad \frac{b}{b_1} = k_1 \quad \frac{c}{c_1} = l_1 \quad \frac{a}{a_2} = h_2 \quad \frac{b}{b_2} = k_2 \quad \frac{c}{c_2} = l_2$$

sostituendo gli indici al posto dei parametri, si ha

$$\begin{cases} \frac{h_1 x}{a} + \frac{k_1 y}{b} + \frac{l_1 z}{c} = 0 \\ \frac{h_2 x}{a} + \frac{k_2 y}{b} + \frac{l_2 z}{c} = 0 \end{cases}$$

E' possibile ricavare il rapporto $x : y : z$, da questo sistema, che risulta

$$x : y : z = a (k_1 l_2 - k_2 l_1) : b (h_1 l_2 - h_2 l_1) : c (h_1 k_2 - h_2 k_1).$$

Le espressioni tra parentesi sono numeri interi e si indicano rispettivamente con u, v, w , per cui

$$x : y : z = au : bv : cw ;$$

poichè a, b, c sono le unità di misura, il rapporto delle coordinate è individuato dal rapporto $u : v : w$, che rappresentano gli indici della retta intersezione dei due piani.

Per le facce di una stessa zona è facile, inoltre, verificare la condizione di tautozionalità per cui la somma dei prodotti degli indici della faccia per i corrispondenti indici dell'asse di zona è uguale a zero, ossia

$$hu + kv + lw = 0$$

Infatti, se un piano è parallelo ad una retta, il loro punto d'intesezione si trova all'infinito, quindi deve essere uguale a 0 (condizione di parallelismo) il determinante del sistema di equazioni :

Fig. 27

$$\begin{aligned} X &= \frac{\Delta x}{\Delta} & X \rightarrow \infty \\ Y &= \frac{\Delta y}{\Delta} & Y \rightarrow \infty \quad \text{se } \Delta = 0 \\ Z &= \frac{\Delta z}{\Delta} & Z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{cases} \frac{h_1 x}{a} + \frac{k_1 y}{b} + \frac{l_1 z}{c} = 0 \\ \frac{h_2 x}{a} + \frac{k_2 y}{b} + \frac{l_2 z}{c} = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni che individuano la retta}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{h x}{a} + \frac{k y}{b} + \frac{l z}{c} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{equazioni del piano}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{h_1}{a} & \frac{k_1}{b} & \frac{l_1}{c} \\ \frac{h_2}{a} & \frac{k_2}{b} & \frac{l_2}{c} \\ \frac{h}{a} & \frac{k}{b} & \frac{l}{c} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h & k & l \end{vmatrix}}{a b c} = 0$$

e dovrà essere uguale a zero il determinante al numeratore delle espressioni di x, y, z

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h & k & l \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia}$$

$$\underset{u}{h(k_1 l_2 - k_2 l_1)} + \underset{v}{k(h_1 l_2 - h_2 l_1)} + \underset{w}{l(h_1 k_2 - h_2 k_1)} = 0$$

$hu + kv + lw = 0$ che rappresenta appunto la condizione di tautozonalità.

Esempio: v. Fig. 28 la faccia (100) appartiene alla zona [010], quindi applicando al condizione di tautozonalità $hu + kv + lw = 0$ si può vedere che essa è valida.

Infatti $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

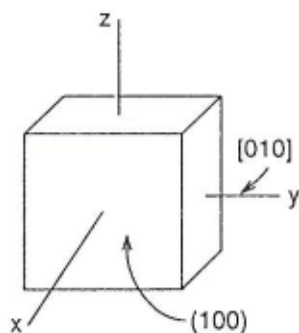


Fig. 28

Applicando le condizioni di tautozonalità è possibile calcolare il simbolo di una faccia che appartiene a due zone. Gli indici della faccia si ricavano dalla matrice formata dagli indici degli assi di zona secondo lo schema :

u_1	v_1	w_1	u_1	v_1	w_1
	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	
u_2	v_2	w_2	u_2	v_2	w_2
	h	k	l		

Altra conseguenza della condizione di tautozonalità è la seguente regola :

sommando agli indici corrispondenti di due facce, si ottiene il simbolo di una nuova faccia appartenente alla zona individuata dalle prime due.

Questa regola permette di determinare tutte le facce possibili di un cristallo e calcolare il loro simbolo partendo da un piccolo numero di facce presenti. La rappresentazione grafica e il calcolo sono facilitati al massimo se si dispone di quattro facce e precisamente, oltre alla faccia fondamentale (111), delle tre facce (100), (010), (001) rappresentanti i tre piani contenenti gli assi a due a due. Nell'esempio di Fig. 29 relativo al sistema cubico si può osservare, in proiezione stereografica, la validità della regola della somma degli indici per le facce della medesima zona. Le operazioni indicate possono essere applicate per un cristallo appartenente a qualsiasi sistema.

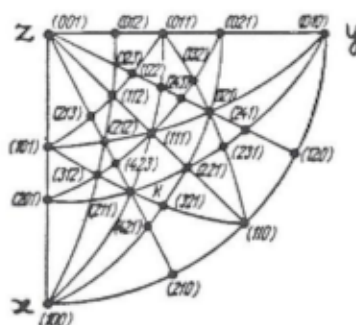


Fig. 29

Per i cristalli dell'esagonale e del trigonale bisogna considerare che tutte le notazioni hanno quattro indici h, k, i, l per le facce, e u, v, ω, w per gli spigoli. In questo caso si calcolano prima tre indici: due corrispondenti agli assi x e y , e l'altro all'asse verticale z ; si deduce il quarto indice dalla relazione

$$h + k + i = 0, \text{ ossia } i = -(h + k).$$

Nelle figure 30 e 31 sono rappresentate le famiglie di facce del sistema esagonale e trigonale secondo il riferimento a quattro assi (BRAVAIS) e quelle del sistema trigonale a tre assi (MILLER).

Il calcolo cristallografico.

Per calcolo cristallografico si intende l'insieme delle operazioni, condotte sia graficamente con l'aiuto della proiezione stereografica, sia con l'impiego di formule della trigonometria sferica, che conducono dalla determinazione dei valori goniometrici ottenuti sperimentalmente sul cristallo alla definizione dei rapporti parametrici unitari $a : b : c$ (faccia fondamentale, degli angoli della terna (se diversi da 90°) e delle notazioni di tutte le facce del cristallo.

Per ogni sistema cristallino è necessario avere un numero minimo di misure angolari da utilizzare nei calcoli. Questo numero è uguale a zero per il sistema cubico in quanto sia la terna che il rapporto parametrico fondamentale non dipendono dalla specie cristallina. Esso è uguale a 1 per il gruppo dimetrico (esagonale, trigonale, tetragonale) poichè la faccia fondamentale ha il terzo parametro variabile a seconda della specie cristallina. Nel sistema rombico il numero sale a due poichè la faccia fondamentale ha due parametri variabili con la specie ($\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$).

Per il monoclinio ai due parametri precedenti si aggiunge il valore dell'angolo β variabile anch'esso con la specie. Infine per il triclinio i parametri salgono a cinque ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, α , β , γ).

Legge dei limiti cristallografici.

Sono state esaminate finora le tre leggi fondamentali della cristallografia: la legge della costanza degli angoli diedri, la legge delle simmetrie e la legge della razionalità degli indici. Si conoscono 32 classi cristalline. La similitudine delle costanti cristallografiche permette di raggruppare le forme cristalline in sistemi dal cubico al triclinio. Ci si può domandare, però, se esiste un qualche rapporto tra questi differenti sistemi. Molti tentativi sono stati fatti per scoprire una relazione che sarebbe potuta servire come base a un sistema di classificazione più razionale (RAMMELSBURG, DUFAUT, GROTH, MALLARD), ma i risultati non hanno avuto inizialmente molto successo. Si deve al cristallografo E. FÉDOROV la scoperta della legge dei limiti cristallografici.

Secondo tale legge un cristallo dei sistemi tetragonali ed esagonale può essere considerato un cristallo ideale o limite. I cristalli degli altri sistemi derivano da queste forme ideali mediante deformazioni omogenee prodotte da operazioni di stiramento positivo o negativo e variazioni angolari. La legge dei limiti cristallografici ha permesso a FÉDOROV di classificare sistematicamente tutte le specie dal punto di vista cristallografico e di creare un metodo nuovo di determinazione dei cristalli in base alla forma. Sembrerebbe in tal modo sufficiente misurare al goniometro gli angoli tra le varie facce di un cristallo e in base a tali valori identificarlo nell'apposito catalogo.

Ma in pratica l'operazione diventa complessa poichè:

1 - i cristalli di una stessa specie possono presentarsi con un ambito costituito da più forme semplici e quindi con angoli tra le facce molto diversi;

2 - l'orientamento, scelta la terna e la faccia fondamentale, con è sempre univoco specialmente nei cristalli dei sistemi a bassa simmetria.

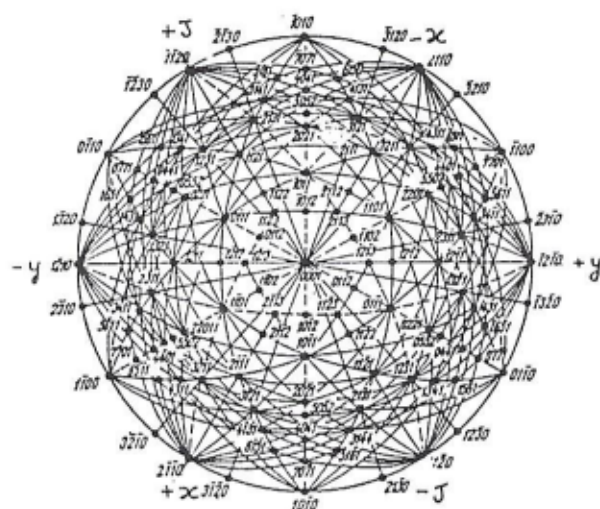


Fig. 30

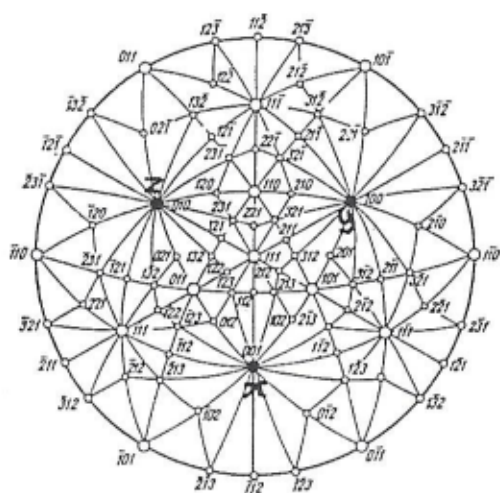


Fig. 31

Forme semplici e loro rappresentazione - Forme composte

Si è già accennato, a proposito della legge della costanza dell'angolo diedro, alle forme reali più o meno sproporzionate e a quelle modello o ideali dei cristalli di una determinata specie. Tale variabilità dipende dalle condizioni ambientali che determinano lo sviluppo delle forme cristalline.

Per questo motivo le facce dei cristalli della medesima specie possono avere forme e sviluppi areali diversi. La ricerca della simmetria è possibile, pertanto, considerando i valori degli angoli diedri, in modo da poter ricostruire la forma modello, ed effettuando la determinazione delle varie proprietà fisiche legate alla simmetria. La forma modello o ideale deve presentare facce omologhe ugualmente sviluppate. Ciò non implica necessariamente che tutte le facce del poliedro cristallino debbano essere ugualmente sviluppate o avere la stessa forma in quanto il poliedro potrebbe essere formato da gruppi di facce omologhe appartenenti a forme diverse combinate tra loro.

Si pone, pertanto, la necessità di distinguere tra forma semplice e forma composta e di descrivere tutte le possibili forme semplici individuabili nei poliedri cristallini e compatibili con la loro simmetria.

Definizione di forma semplice.

Si definisce forma semplice il complesso delle facce necessariamente coesistenti con una data faccia in virtù di un certo grado di simmetria. Per generare una forma semplice è necessario, quindi, fissare la giacitura di un piano rispetto agli elementi di simmetria di una data classe ed effettuare tutte le operazioni di simmetria indicate da tali elementi. Si possono avere, in definitiva, per ogni classe di simmetria un certo numero di tipi di forme semplici ciascuno ottenuto a secondo delle ipotesi di giacitura che viene fissata per il piano. Va tenuto presente che le ipotesi di giacitura del piano sono, in teoria, illimitate, mentre le forme semplici che compaiono sul poliedro cristallino sono limitate dalla legge della razionalità degli indici.

Uno stesso tipo di forma semplice può essere comune anche a classi aventi simmetrie diverse. In tal caso bisogna distinguere tra singonia o simmetria puramente geometrica, detta anche di posizione, e simmetria fisica, nel senso che le forme in cui la simmetria geometrica coincide con quella fisica appartengono a classi che presentano, nell'ambito di uno stesso sistema, il più alto numero di elementi di simmetria.

Tali classi vengono dette oloedriche per distinguerle da quelle cosiddette merocedriche nelle quali le forme semplici presentano una simmetria fisica inferiore a quella geometrica. Ad esempio, nel sistema cubico la forma semplice rappresentata dal cubo si ritrova in tutte le classi del sistema. Essa può essere ottenuta, infatti, sia con l'ipotesi di un piano normale ad uno degli assi quaternari (A_4) nelle classi prima e quarta, sia con l'ipotesi di un piano normale ad uno degli assi binari (A_2) nelle classi seconda, terza e quinta.

Le cinque forme cubiche sono, però, diverse cristallograficamente anche se identiche geometricamente. Infatti, soltanto nella prima classe la simmetria fisica coincide con quella geometrica o singonia, nelle restanti classi la simmetria fisica risulta inferiore alla singonia.

Notazione e rappresentazione delle forme semplici.

Tutte le facce di una forma semplice presentano indici simili, essendo state dedotte da uno stesso piano posto in una determinata posizione rispetto agli elementi di simmetria. Tali indici possono essere positivi o negativi e il loro ordine può cambiare, ma i loro valori numerici devono necessariamente essere identici per tutte le facce della forma. Nel caso del cubo, per esempio, i simboli delle sei facce sono rispettivamente

$$(100), (010), (001), (\bar{1}00), (0\bar{1}0), (00\bar{1}).$$

Volendo indicare la forma semplice si possono utilizzare gli indici di una faccia della forma stessa chiusi tra parentesi graffa. E' opportuno, però, fissare le seguenti convenzioni circa la scelta della faccia :

- 1) - gli indici devono essere possibilmente positivi;
- 2) - essi devono soddisfare alle condizioni :

$$\begin{array}{ll} h > k > 1 & \text{nel gruppo monometrico,} \\ h > k & \text{nel gruppo dimetrico.} \end{array}$$

Nel gruppo dimetrico la scelta della faccia non è sottoposta a particolari vincoli ma condizionata soltanto dalla scelta dell'orientamento. Ad esempio, il simbolo della forma semplice cubo è $\{100\}$ perchè soddisfa alle due condizioni precedenti.

E' importante notare che il simbolo va inteso in relazione alla classe di simmetria cui appartiene la forma, in quanto uno stesso simbolo può indicare forme diverse. Tornando al caso di $\{100\}$ tale simbolo rappresenta il cubo in tutte le classi del sistema monometrico, ma rappresenta un prisma tetragonale nelle classi del sistema tetragonale, un pinacoide, un pedio nelle classi del gruppo trimetrico.

Una difficoltà che spesso si presenta è quella di stabilire il numero delle facce che una forma semplice può presentare soprattutto nelle classi ad elevata simmetria. Basti pensare alle forme delle classi del sistema cubico che possono essere formate da 24, 48 facce. In questi casi la proiezione stereografica è di estrema utilità in quanto permette facilmente di stabilire il numero delle facce della forma e le loro posizioni relative, effettuando le operazioni di simmetria della classe i cui elementi sono stati anch'essi rappresentati in proiezione stereografica.

Resta ancora un'altra difficoltà: quella, cioè, di stabilire il contorno delle facce (triangoli, quadrilateri, pentagoni) quando si tratta di forme semplici ad elevato numero di facce. In tal caso la costruzione di modelli di materiale opportuno può superare alle carenze intuitive e agli sforzi dell'immaginazione.

Forme aperte, forme chiuse e loro nomenclatura.

Le forme semplici non sempre possiedono un numero di facce sufficienti per contenere una forma finita di spazio e assumere, così, l'aspetto di un poliedro. Da ciò deriva la distinzione tra forme aperte, le cui facce non racchiudono lo spazio in tutte le direzioni, e forme chiuse che lo racchiudono. Le prime prevalgono nelle classi a bassa simmetria, mentre le seconde nelle classi ad alta simmetria.

Su un totale di 47 tipi di forme semplici, considerate dal solo punto di vista delle singonia, si hanno 17 tipi di forme aperte e 30 tipi di forme chiuse. Ogni tipo di forma ha ricevuto un nome particolare.

Così per le forme aperte si hanno le denominazioni seguenti:

Pedio (una sola faccia), pinacoide, doma, sfenoide (due facce), prisma, piramide.

Per le forme chiuse:

Bipiramide, bisfenoide, trapezoedro, romboedro, scalenoedro e tutte quelle del sistema cubico.

Queste ultime, per poterle meglio ricordare, possono essere classificate in tre gruppi:

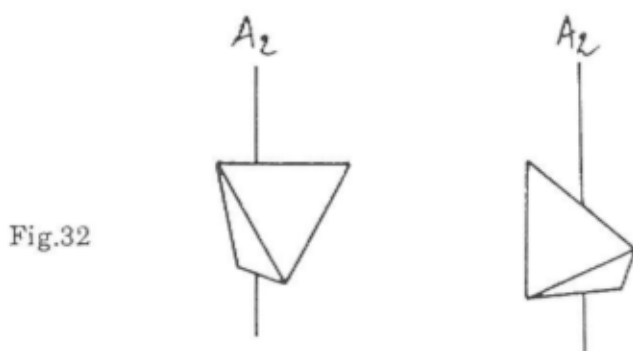
- 1 - Cubo o esaedro, tetracisesaedro, rombododecaedro, pentagonododecaedro;
- 2 - Ottaedro, triacisottaedro, esacisottaedro, diacisdodecaedro, icositetraedro pentagonale;
- 3 - Tetraedro, triacistetraedro, esacistetraedro, deltoidedodecaedro tetraedrico, pentagonododecaedro tetraedrico.

Forme coniugate

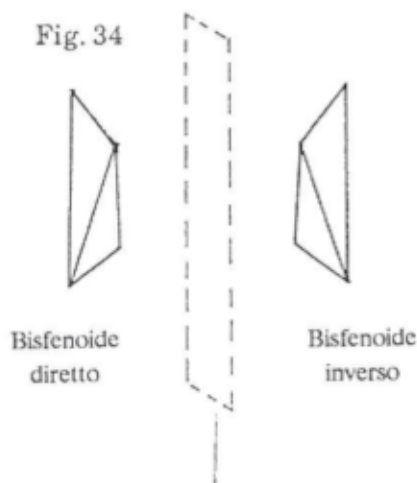
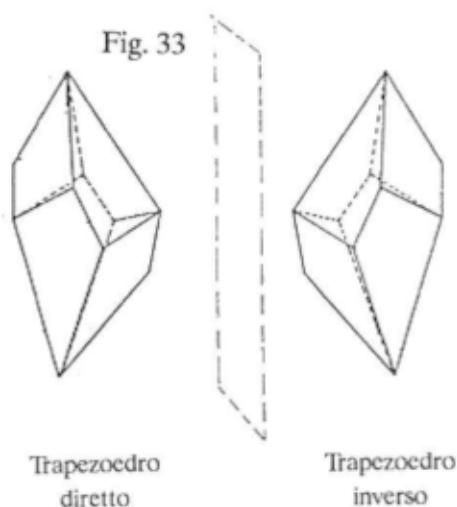
Si è già accennato alla distinzione delle classi cristalline in oloedriche e meroedriche in base alle forme semplici che in esse appaiono. Anche le forme appartenenti a tali classi possono dividersi in forme oloedriche e forme meroedriche.

Le forme oloedriche compaiono nelle prime classi di ogni sistema, mentre le meroedriche nelle restanti classi. Alcune forme meroedriche possono differire tra loro solo per l'orientamento oppure per essere l'una immagine speculare dell'altra. Tali forme vengono dette rispettivamente: coniugate congruenti e coniugate enantiomorfe. Le forme coniugate congruenti sono quelle che si possono ottenere l'una dall'altra per rotazione intorno ad un asse di simmetria di ordine corrispondente alla metà ($\frac{n}{2}$) di quello della classe oloedrica corrispondente.

Ad esempio: i due tetraedri destro e sinistro (Fig. 32) differiscono solo per l'orientamento e possono ottenersi l'uno dall'altro per rotazione di 90° intorno all' A_2 (corrispondente all' A_4 della classe oloedrica dove compare come forma l'ottaedro le cui otto facce corrispondono per giacitura a quelle dei due tetraedri).



Le forme coniugate enantiomorfe sono invece forme che si ottengono per riflessione rispetto ad un piano che nella classe oloedrica corrispondente rappresenta un piano di simmetria. Ad esempio i trapezoedri diretti e inversi, gli scalenoedri, i bisfenoidi ecc., tutte forme appartenenti alle classi (classi oloassi) che sono caratterizzate dalla presenza di soli assi di simmetria (Fig. 33 e Fig. 34).



Forme composte

Le forme composte sono quelle che risultano dalla combinazione di due o più forme semplici sia aperte che chiuse.

Evidentemente ogni forma composta deve racchiudere una porzione finita di spazio dovendo rappresentare il poliedro cristallino. Per cui un cristallo può risultare costituito da:

1 - una sola forma semplice chiusa o da combinazioni di più forme semplici chiuse appartenenti alla stessa classe di simmetria;

2 - più forme semplici aperte della stessa classe orientate in modo da poter chiudere lo spazio;

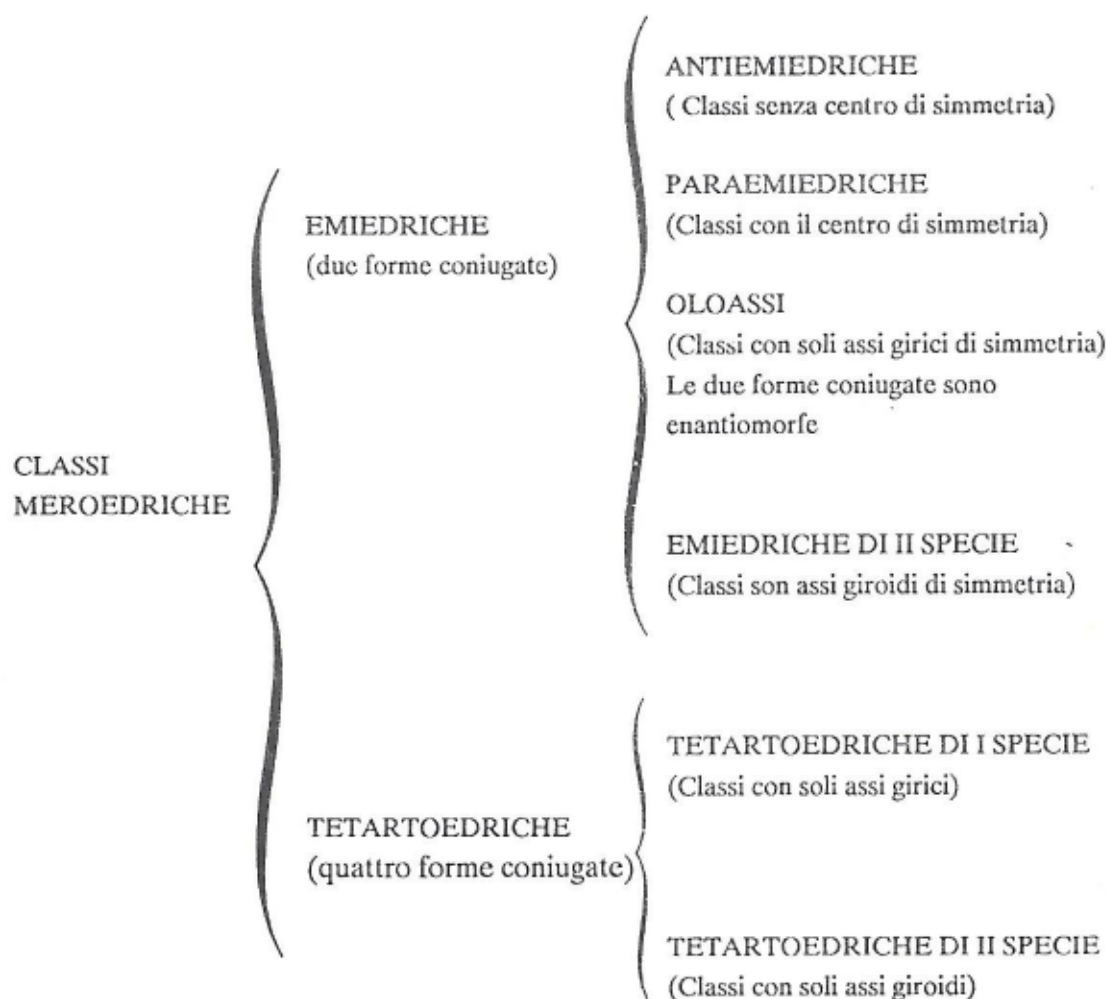
3 - forme semplici sia aperte che chiuse sempre della stessa classe.

Ci si potrebbe domandare quale limite sia possibile circa il numero delle forme che possono combinarsi. La risposta è, evidentemente, quella che tale numero è condizionato dalla legge della razionalità degli indici. Sono presenti, in generale, solo quelle forme le cui facce sono rappresentate da indici semplici. L'esperienza dimostra che i singoli indici difficilmente assumono un valore superiore a 7 e che se si effettua la somma degli indici il valore che si ottiene non supera il numero di 10.



SISTEMATICA DELLE FORME SEMPLICI E LORO DISTRIBUZIONE NELLE CLASSI DEI VARI SISTEMI E GRUPPI CRISTALLINI.

Si è già data la definizione delle classi oloedriche e meroedriche e delle relative forme. Restano ancora da classificare in particolare le classi meroedriche. A tale scopo può risultare utile il seguente schema:



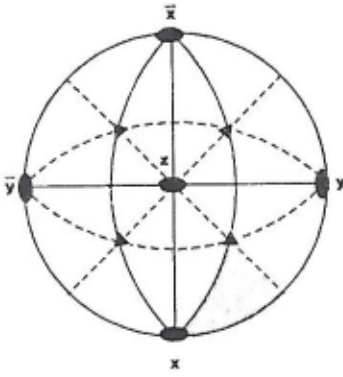
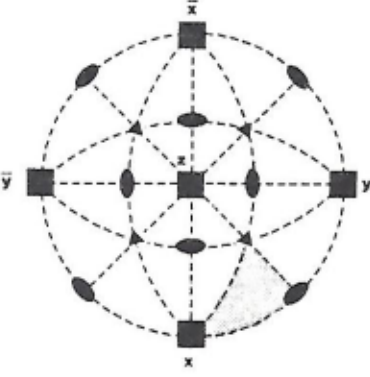
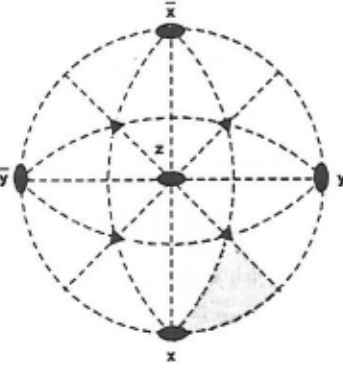
Nei sistemi aventi cinque classi di simmetria non sono presenti le classi: emiedrica di II specie e tetartoedrica di II specie.

Ogni classe, inoltre, è caratterizzata dal grado di simmetria e prende il nome dalla forma semplice avente il maggior numero di facce. Nella Cristallografia mineralogica alle classi si attribuisce anche il nome del minerale più comune le cui forme cristalline presentano la simmetria delle classi stesse.

T A B E L L E
DELLE
CLASSI CRISTALLOGRAFICHE

SISTEMA CUBICO ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$)

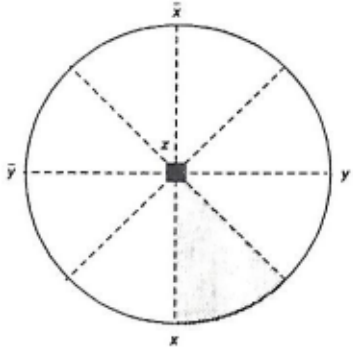
SIMBOLI DELLE FORME SEMPLICI	1ª CLASSE (OLOEDRICA) ESACISOTTAEDRICA	2ª CLASSE (ANTIEMIEDRICA) ESACISTETRAEDRICA
	4A ₃ 3A ₄ 6A ₂ 3P 6P' C	4A ₃ (P) 3A ₂ 6P'
$\{100\}$	CUBO	CUBO
$\{110\}$	ROMBODODECAEDRO	ROMBODODECAEDRO
$\{111\}$	OTTAEDRO	TETRAEDRI d. $\{111\}$ s. $\{1\bar{1}1\}$
$\{hk0\}$	TETRACISESAEDRI	TETRACISESAEDRI
$\{hhl\}$	TRIA CISOTTAEDRI	DELTOIDEDODECAEDRI d. $\{hhl\}$ s. $\{hhl\}$
$\{hll\}$	ICOSITETRAEDRI	TRIA CISTETRAEDRI d. $\{hll\}$ s. $\{h\bar{l}l\}$
$\{hkl\}$	ESACISOTTAEDRI	ESACISTETRAEDRI d. $\{hkl\}$ s. $\{h\bar{k}l\}$
MINERALI CARATTERISTICI PIU' COMUNI	fluorite, galena, salgemma granati, diamante	blenda, zunyite tetraedrite
PROIEZIONE STEREOGRAFICA DEGLI ELEMENTI DI SIMMETRIA SUL PIANO (001)		

3 ^a CLASSE (PARAEMIEDRICA) DIACISDODECAEDRICA	4 ^a CLASSE (OLOASSE) ICOSITETRAEDRICA PENTAGONALE	5 ^a CLASSE (TETARTOEDRICA I) PENTAGONOEDODECAEDRICA TETRAEDRICA
4A ₃ 3A ₂ 3P C	4A ₃ 3A ₄ 6A ₂	4A _{3(p)} 3A ₂
CUBO ROMBODODECAEDRO OTTAEDRO PENTAGONODODECAEDRI d. { h k 0 } i. { k h 0 } TRIACISOTTAEDRI ICOSITETRAEDRI DIACISDODECAEDRI d. { h k l } i. { k h l }	CUBO ROMBODODECAEDRO OTTAEDRO TETRACISOTTAEDRI TRIACISOTTAEDRI ICOSITETRAEDRI ICOSITETRAEDRI PENTAGONALI d. { h k l } i. { k h l }	CUBO ROMBODODECAEDRO TETRAEDRI d. { 111 } s. { $\bar{1}\bar{1}1$ } PENTAGONODODECAEDRI d. { h k 0 } i. { k h 0 } DELTOIDEDODECAEDRI d { h h l } s. { h h l } TRIACISTETRAEDRI d { h l l } s. { h $\bar{l}l$ } PENTAGONODODECAEDRI TETRAEDRICI dd { h k l } id { k h l } ds { h k l } is { k h l }
pyrite, hauerite, cobaltite bixbyite	cuprite, silvite	ullmannite, langbeinite
		

GRUPPO DIMETRICO
SISTEMA TETRAGONALE ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$)

caratteristica $a = b \neq c$ faccia fondamentale $a : a : c = 1 : 1 : \frac{c}{a}$ $\left[\frac{c}{a} \neq 1 \right]$

SIMBOLI DELLE FORME SEMPLICI	1 ^a CLASSE (OLOEDRICA) BIPIRAMIDALE DITETRAGONALE	2 ^a CLASSE (ANTIEMIEDRICA) PIRAMIDALE DITETRAGONALE
	$A_4 \ 2A'_2 \ 2A''_2 \ P \ 2P' \ 2P'' \ C$	$A_{4(p)} \ 2P' \ 2P''$
$\{ 100 \}$	PRISMA TETRAGONALE II Ord.	PRISMA TETRAGONALE II Ord.
$\{ 110 \}$	PRISMA TETRAGONALE I Ord.	PRISMA TETRAGONALE I Ord.
$\{ hk0 \}$	PRISMI DITETRAGONALI	PRISMI DITETRAGONALI
$\{ 001 \}$	PINACOIDE BASALE	PEDI sup. $\{ 001 \}$ inf. $\{ 00\bar{1} \}$
$\{ h0l \}$	BIPIRAMIDI TETRAGONALI II Ord.	PIRAMIDI TETRAGONALI II Ord. sup. $\{ h0l \}$ inf. $\{ h0\bar{l} \}$
$\{ hhl \}$	BIPIRAMIDI TETRAGONALI I Ord.	PIRAMIDI TETRAGONALI I Ord. sup. $\{ hhl \}$ inf. $\{ hh\bar{l} \}$
$\{ hkl \}$	BIPIRAMIDI DITETRAGONALI	PIRAMIDI DITETRAGONALI sup. $\{ hkl \}$ inf. $\{ kh\bar{l} \}$
MINERALI CARATTERISTICI PIU' COMUNI	rutilo haussmannite ottaedrite apofillite cassiterite brauilite zirconio vesuvianite	diaboleite
PROIEZIONE STEREOGRAFICA DEGLI ELEMENTI DI SIMMETRIA SUL PIANO (001)		

3 ^a CLASSE (PARAEMIEDRICA) BIPIRAMIDALE TETRAGONALE	4 ^a CLASSE (OLOASSE) TRAPEZOEDRICA TETRAGONALE
A ₄ P C	A ₄ 2A' ₂ 2A'' ₂
PRISMA TETRAGONALE II Ord. PRISMA TETRAGONALE I Ord. PRISMI DITETRAGONALI III Ord. d. {hk0} i. {kh0} PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI TETRAGONALI II Ord. BIPIRAMIDI TETRAGONALI I Ord. BIPIRAMIDI TETRAGONALI III Ord. d. {hkl} i. {khl}	PRISMA TETRAGONALE II Ord. PRISMA TETRAGONALE I Ord. PRISMI DITETRAGONALI PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI TETRAGONALI II Ord. BIPIRAMIDI TETRAGONALI I Ord. TRAPEZOEDRITETRAGONAL d. {hkl} i. {khl}
scheelite, powellite wulfenite	fosgenite
	

5^a CLASSE
(TETARTOEDRICA I)
PIRAMIDALE
TETRAGONALE

$A_4(p)$

PRISMA TETRAGONALE
II Ord.

PRISMA TETRAGONALE
I Ord.

PRISMI DITETRAGONALI
II Ord. d. $\{hk0\}$ i. $\{kh0\}$

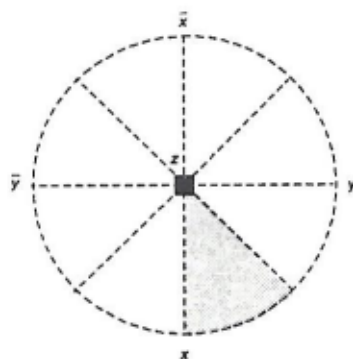
PEDI
sup. $\{001\}$ inf. $\{00\bar{1}\}$

PIRAMIDI TETRAGONALI
sup. $\{h0l\}$ inf. $\{h0\bar{l}\}$

PIRAMIDI TETRAGONALI
I Ord. sup. $\{hhl\}$ inf. $\{hhl\}$

PIRAMIDI TETRAGONALI
III Ord.
superiori inferiori
d. $\{hkl\}$ i. $\{khl\}$ d. $\{hkl\}$ i. $\{kh\bar{l}\}$

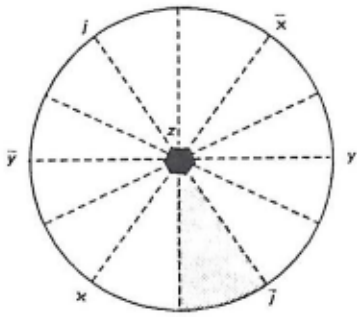
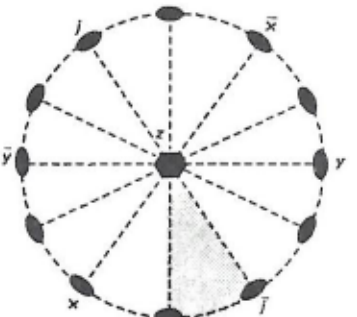
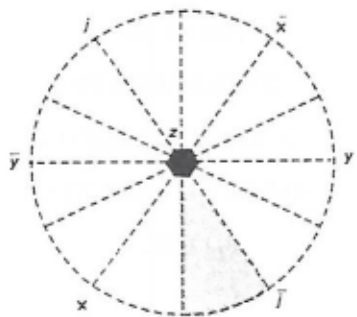
non noti - solo composti
artificiali



6^a CLASSE (EMIEDRICA II SPECIE) SCALENOEDRICA TETRAGONALE	7^a CLASSE (TETARTOEDRICA II SPECIE) BISFENOIDALE TETRAGONALE
$A_2(4) \ 2A'_2 \ 2P''$	$A_2(4)$
PRISMA TETRAGONALE II Ord. PRISMA TETRAGONALE I Ord. PRISMI DITETRAGONALI PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI TETRAGONALI II Ord. BISFENOIDI TETRAGONALI I Ord. d. $\{hhl\}$ s. $\{\bar{h}hl\}$ SCALENOEDRITETRAGONALI d. $\{hkl\}$ s. $\{\bar{h}\bar{k}l\}$	PRISMA TETRAGONALE II Ord. PRISMA TETRAGONALE I Ord. PRISMI DITETRAGONALI d. $\{hk0\}$ i. $\{k\bar{h}0\}$ PINACOIDE BASALE BISFENOIDI TETRAGONALI I Ord. d. $\{h0l\}$ s. $\{0hl\}$ BISFENOIDI TETRAGONALI I Ord. d. $\{hhl\}$ s. $\{\bar{h}hl\}$ BISFENOIDI TETRAGONALI III Ord. dd. $\{hkl\}$ ds. $\{\bar{h}\bar{k}l\}$ id. $\{hkl\}$ is. $\{\bar{h}\bar{k}l\}$
calcopirite - stannite, gehlenite - edingtonite	cahnite, pentaeritrite

SISTEMA ESAGONALE ($\alpha = \beta = \delta = 90^\circ$; $\gamma = 120^\circ$)

SIMBOLI DELLE FORME SEMPLICI	1ª CLASSE (OLOEDRICA) BIPIRAMIDALE DIESAGONALE	2ª CLASSE (ANTIEMIEDRICA) PIRAMIDALE DIESAGONALE
	A ₆ 3A' ₂ 3A'' ₂ P 3P' 3P'' C	A ₆ 3P' 3P''
{ 10$\bar{1}$0 } { 11$\bar{2}$0 } { h k$\bar{1}$0 } { 0001 } { h0$\bar{h}$l } { hh$\bar{2}$hl } { hkil }	PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DIESAGONALI PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI ESAGONALI I Ord. BIPIRAMIDI ESAGONALI II Ord. BIPIRAMIDI DIESAGONALI	PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DIESAGONALI PEDI sup. { 0001 } inf. { 000$\bar{1}$ } PIRAMIDI ESAGONALI sup. { h0$\bar{h}$l } inf. { h0h$\bar{l}$ } PIRAMIDI ESAGONALI II Ord. sup. { hh$\bar{2}$hl } inf. { hh2h$\bar{l}$ } PIRAMIDI DIESAGONALI sup. { hkil } inf. { hki$\bar{l}$ }
MINERALI CARATTERISTICI PIU' COMUNI	berillo - molibdenite - tridimite grafite - pirrotina - covellite	greenockite - zincite - bromellite iodargirite - würtzite
PROIEZIONE STEREOGRAFICA DEGLI ELEMENTI DI SIMMETRIA SUL PIANO (0001)	The diagram shows a circular Wulff net with radial lines representing crystallographic directions. A central point is labeled 'z'. Points on the circumference are labeled with Miller indices: (0001) at the top, (1120) at the bottom right, (hkil) at the bottom center, (hoil) at the bottom left, and others like x, y, j, i, x-bar, y-bar. Some points are enclosed in circles, indicating specific crystal faces or forms.	The diagram shows a circular Wulff net similar to the one in the previous column, but with different orientations and labels. It includes axes x, y, z and points labeled with indices like i, j, x-bar, y-bar, and some shaded regions representing crystal forms.

3^a CLASSE (PARAEMIEDRICA) BIPIRAMIDALE ESAGONALE	4^a CLASSE (OLOASSE) TRAPEZOEDRICA ESAGONALE	5^a CLASSE (TETARTOEDRICA) PIRAMIDALE ESAGONALE
A_6 P C	A_6 $3A'_2$ $3A''_2$	A_6 (p)
PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DIESAGONALI d. $\{hk\bar{1}0\}$ i. $\{kh\bar{1}0\}$ PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI ESAGONALI I Ord. BIPIRAMIDI ESAGONALI II Ord. BIPIRAMIDI ESAGONALI III Ord. d. $\{hk\bar{1}l\}$ i. $\{hk\bar{1}l\}$	PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DIESAGONALI PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI ESAGONALI I Ord. BIPIRAMIDI ESAGONALI II Ord. TRAPEZOEDRI ESAGONALI d. $\{hk\bar{1}l\}$ i. $\{hk\bar{1}l\}$	PRISMA ESAGONALE I. Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI ESAGONALI III Ord. d. $\{hk\bar{1}0\}$ i. $\{kh\bar{1}0\}$ PEDI sup. $\{0001\}$ inf. $\{000\bar{1}\}$ PIRAMIDI ESAGONALI I Ord. sup. $\{h0hl\}$ inf. $\{h0h\bar{l}\}$ PIRAMIDI ESAGONALI II Ord. sup. $\{hh2hl\}$ inf. $\{hh2h\bar{l}\}$ PIRAMIDI ESAGONALI III Ord. d. s. $\{hk\bar{1}l\}$ d.i. $\{hk\bar{1}l\}$ i.d. $\{kh\bar{1}l\}$ i.i. $\{kh\bar{1}l\}$
apatite, piromorfite, mimetite	kaliofilite - quarzo β	nefelina, cancrinite, kalsilite
		

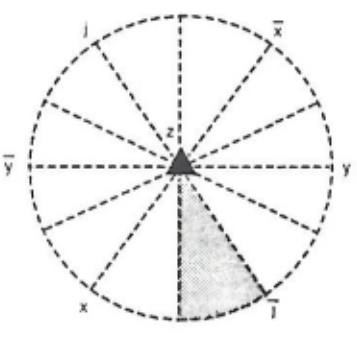
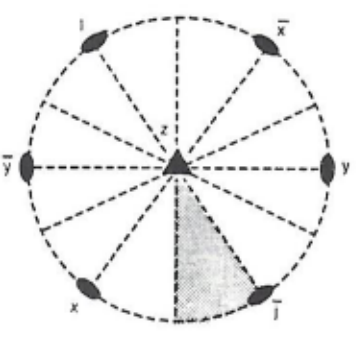
GRUPPO DIMETRICO

SISTEMA TRIGONALE ($\alpha = \beta = \delta = 90^\circ$; $\gamma = 120^\circ$)

caratteristica $a=b=d \neq c$ $a:a:c = 1:1:1$ $\frac{c}{a} (\frac{c}{a} > 1)$

faccia fondamentale $a = b = c$ $a:a:a = 1:1:1$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$

SIMBOLO DELLE FORME SEMPLICI	1 ^a CLASSE (OLOEDRICA) SCALENOEDRICA DITRIGONALE	2 ^a CLASSE (ANTIEMIEDRICA) PIRAMIDALE DITRIGONALE
	$A_3 \ 3A'_2 \ 3P''$	$A_3 (p) \ 3P''$
$\{ 10\bar{1}0 \}$ $\{ 11\bar{2}0 \}$ $\{ h k \bar{1}0 \}$ $\{ 0001 \}$ $\{ h0\bar{h}l \}$ $\{ hh2\bar{h}l \}$ $\{ hk\bar{l} \}$	PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DIESAGONALI PINACOIDE BASALE ROMBOEDRI d. $\{ h0\bar{h}l \}$ i. $\{ 0h\bar{h}l \}$ BIPIRAMIDI ESAGONALI II Ord. SCALENOEDRI DITRIGONALI d. $\{ hk\bar{l} \}$ i. $\{ h\bar{k}l \}$	PRISMI TRIGONALI d. $\{ 10\bar{1}0 \}$ i. $\{ 01\bar{1}0 \}$ PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DITRIGONALI d. $\{ h k \bar{1}0 \}$ i. $\{ k h \bar{1}0 \}$ PEDI sup. $\{ 0001 \}$ inf. $\{ 000\bar{1} \}$ PIRAMIDI TRIGONALI d.s. $\{ h0\bar{h}l \}$ d.i. $\{ \bar{h}0hl \}$ i.s. $\{ 0h\bar{h}l \}$ i.i. $\{ 0hhl \}$ PIRAMIDI ESAGONALI sup. $\{ hh2\bar{h}l \}$ inf. $\{ hh2hl \}$ PIRAMIDI DITRIGONALI d.s. $\{ hk\bar{l} \}$ d.i. $\{ h\bar{k}l \}$ i.s. $\{ k\bar{h}l \}$ i.i. $\{ kh\bar{l} \}$
MINERALI CARATTERISTICI PIÙ COMUNI	calcite, ematite, corindone, cabasite, brucite, rodocrosite	tormalina, pirargirite, proustite alunite
PROIEZIONE STEREOGRAFICA DEGLI ELEMENTI DI SIMMETRIA SUL PIANO (0001)		

3 ^a CLASSE (PARAEMIEDRICA) ROMBOEDRICA	4 ^a CLASSE (OLOASSE) TRAPEZOEDRICA TRIGONALE
A ₃ C	A ₃ 3A ₂ (p)
PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI ESAGONALI III Ord. d. { $hk\bar{1}0$ } i. { $kh\bar{1}0$ } PINACOIDE BASALE ROMBOEDRI I Ord. d. { $h0hl$ } i. { $0hhl$ } ROMBOEDRI II Ord. d. { $hh2hl$ } s. { $2hhhl$ } ROMBOEDRI III Ord. dd. { $hk\bar{1}l$ } ds. { $ikhl$ } id. { $kh\bar{1}l$ } is. { $ihkl$ }	PRISMA ESAGONALE I Ord. PRISMI TRIGONALI d. { $11\bar{2}0$ } s. { $2\bar{1}\bar{1}0$ } PRISMI DITRIGONALI d. { $hk\bar{1}0$ } s. { $i\bar{k}h0$ } PINACOIDE BASALE ROMBOEDRI d. { $h0hl$ } i. { $0hhl$ } BIPIRAMIDI TRIGONALI d. { $hh2hl$ } s. { $2hhhl$ } TRAPEZOEDRI TRIGONALI dd. { $hk\bar{1}l$ } ds. { $ikhl$ } id. { $kh\bar{1}l$ } is. { $ihkl$ }
dolomite, ankerite, ilmenite dioplasio, fenacite, willenite	quarzo, cinabro
	

2]

a:

f

5^a CLASSE
(TETARTOEDRICA I)
PIRAMIDALE
TRIGONALE

$A_3(p)$

PRISMI TRIGONALI I Ord.
d. $\{10\bar{1}0\}$ i. $\{01\bar{1}0\}$

PRISMI TRIGONALI II Ord.
d. $\{1120\}$ s. $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$

PRISMI TRIGONALI III Ord.
dd. $\{hk\bar{1}0\}$ ds. $\{ik\bar{h}0\}$
id. $\{k\bar{h}10\}$ is. $\{i\bar{h}k0\}$
PEDI
sup. $\{0001\}$ inf. $\{000\bar{1}\}$

PIRAMIDI TRIGONALI I Ord.

d.s. $\{h0hl\}$ d.i. $\{h0\bar{h}l\}$
i.s. $\{0hhl\}$ i.i. $\{0h\bar{h}l\}$

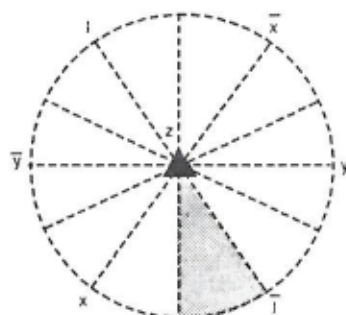
PIRAMIDI TRIGONALI II Ord.

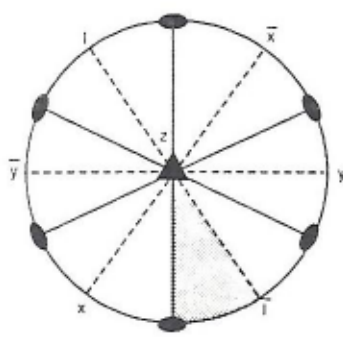
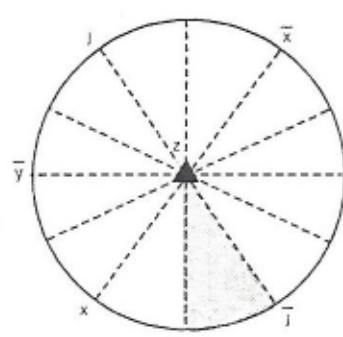
ds. $\{hh2hl\}$ di. $\{hh2\bar{h}l\}$
is. $\{2hhh\}$ ii. $\{2h\bar{h}hl\}$

PIRAMIDI TRIGONALI III Ord.

dds $\{hk\bar{1}l\}$ ddi $\{h\bar{k}1l\}$
dss $\{ikhl\}$ dsi $\{i\bar{k}hl\}$
ids $\{k\bar{h}1l\}$ idi $\{k\bar{h}\bar{1}l\}$ iss $\{i\bar{h}kl\}$ isi $\{i\bar{h}\bar{k}l\}$

weloganite, aktashite,
nowackiite



6^a CLASSE (EMIEDRICA I) BIPIRAMIDALE DITRIGONALE	7^a CLASSE (TETARTOEDRICA II) BIPIRAMIDALE TRIGONALE
A ₃ 3A ₂ 3P ^{''} P	A ₃ P
PRISMI TRIGONALI I Ord. d. { 10$\bar{1}$0 } i. { 01$\bar{1}$0 } PRISMA ESAGONALE II Ord. PRISMI DITRIGONALI d. { h k $\bar{1}$0 } i. { k h $\bar{1}$0 } PINACOIDE BASALE PIRAMIDI TRIGONALI d. { h0$\bar{h}$l } i. { 0h$\bar{h}$l } BIPIRAMIDE ESAGONALE II Ord. BIPIRAMIDI DITRIGONALI d. { hk$\bar{l}$ } i. { kh$\bar{l}$ }	PRISMI TRIGONALI I Ord. d. { 10$\bar{1}$0 } i. { 01$\bar{1}$0 } PRISMI TRIGONALI II Ord. d. { 11$\bar{2}$0 } s. { 2$\bar{1}$10 } PRISMI TRIGONALI III Ord. dd. { hk$\bar{i}$0 } ds. { ik$\bar{h}$0 } id. { kh$\bar{i}$0 } is. { ih$\bar{k}$0 } PINACOIDE BASALE BIPIRAMIDI TRIGONALI I Ord. d. { h0$\bar{h}$l } i. { 0h$\bar{h}$l } BIPIRAMIDITRIGONALI II Ord. d. { hh2$\bar{h}$l } i. { 2h$\bar{h}$hl } BIPIRAMIDITRIGONALI III Ord. dd. { hk$\bar{l}$ } ds. { ik$\bar{h}$l } id. { kh$\bar{l}$ } is. { ih$\bar{k}$l }
benitoite	penfieldite (?)
	

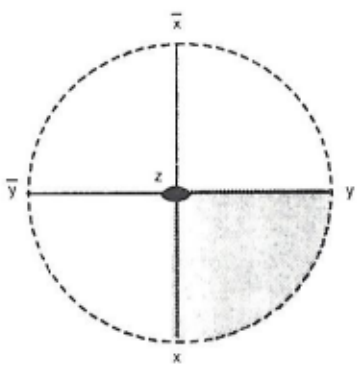
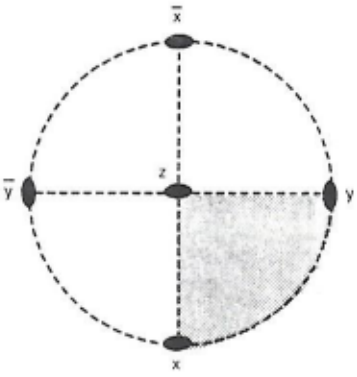
GRUPPO TRIMETRICO

SISTEMA ROMBICO ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$)

caratteristica $a \neq b \neq c$

faccia fondamentale $a:b:c = \frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}$ [$\frac{a}{b} \geq 1$; $\frac{c}{b} \geq 1$]

SIMBOLI DELLE FORME SEMPLICI	1 ^a CLASSE (OLOEDRICA) BIPIRAMIDALE ROMBICA
	A ₂ A' ₂ A'' ₂ P P' P'' C
$\{ 100 \}$ $\{ 010 \}$ $\{ 001 \}$ $\{ 0kl \}$ $\{ h0l \}$ $\{ hk0 \}$ $\{ hkl \}$	PINACOIDE I SPECIE (ANTERIORE) PINACOIDE II SPECIE (LATERALE) PINACOIDE III SPECIE (BASALE) PRISMI ROMBICI I SPECIE (ANTERIORI) PRISMI ROMBICI II SPECIE (LATERALI) PRISMI ROMBICI III SPECIE (VERTICALI) BIPIRAMIDI ROMBICHE
MINERALI CARATTERISTICI PIU' COMUNI	zolfo, aragonite, crisoberillo, cerussite, topazio, celestina, antimonite, olivine
PROIEZIONE STEREOGRAFICA DEGLI ELEMENTI DI SIMMETRIA SUL PIANO (001)	

2^a CLASSE (ANTIEMIEDRICA) PIRAMIDALE ROMBICA	3^a CLASSE (OLOASSE) BISFENOIDALE ROMBICA
$A_2(p)$ P' P''	A_2 A'₂ A''₂
PINACOIDE I SPECIE (ANTERIORE) PINACOIDE II SPECIE (LATERALE) PEDI s. { 001 } i. { 00$\bar{1}$ } DOMI I SPECIE (ANTERIORI) s. { 0kl } i. { 0k$\bar{l}$ } DOMI II SPECIE (LATERALI) s. { h0l } i. { h0$\bar{l}$ } PRISMI ROMBICI III SPECIE (VERTICALI) PIRAMIDI ROMBICHE s. { hkl } i. { hk$\bar{l}$ }	PINACOIDE I SPECIE (ANTERIORE) PINACOIDE II SPECIE (LATERALE) PINACOIDE III SPECIE. (BASALE) PRISMI ROMBICI I SPECIE (ANTERIORI) PRISMI ROMBICI II SPECIE (LATERALI) PRISMI ROMBICI III SPECIE (VERTICALI) BISFENOIDI ROMBICI d. { hkl } i. { kk$\bar{l}$ }
calamina, enargite, bournonite natrolite, struvite	conicalcite, descloizite, epsomite, morenosite
	

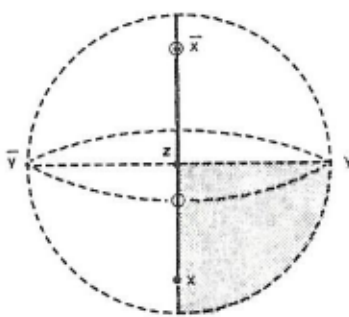
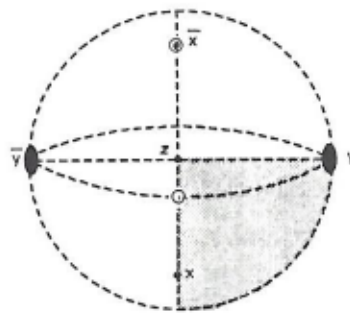
GRUPPO TRIMETRICO

SISTEMA ROMBICO ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$)

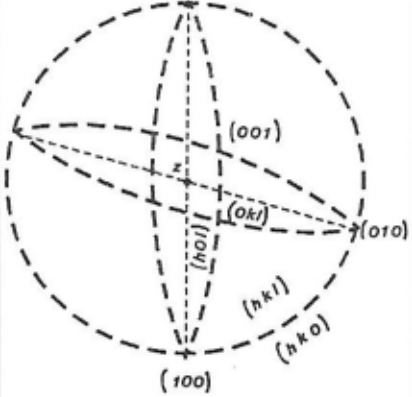
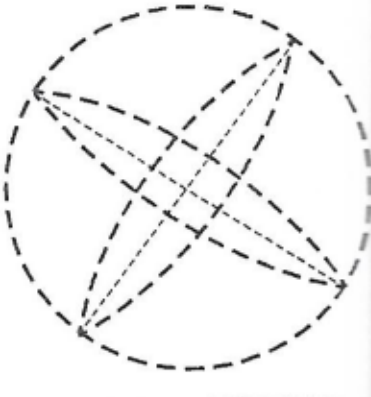
caratteristica $a \neq b \neq c$

faccia fondamentale $a:b:c = \frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}$ [$\frac{a}{b} \geq 1$; $\frac{c}{b} \geq 1$]

SIMBOLI DELLE FORME SEMPLICI	1 ^a CLASSE (OLOEDRICA) BIPIRAMIDALE ROMBICA
	A ₂ A' ₂ A'' ₂ P P' P'' C
$\{ 100 \}$ $\{ 010 \}$ $\{ 001 \}$ $\{ 0kl \}$ $\{ h0l \}$ $\{ hk0 \}$ $\{ hkl \}$	PINACOIDE I SPECIE (ANTERIORE) PINACOIDE II SPECIE (LATERALE) PINACOIDE III SPECIE (BASALE) PRISMI ROMBICI I SPECIE (ANTERIORI) PRISMI ROMBICI II SPECIE (LATERALI) PRISMI ROMBICI III SPECIE (VERTICALI) BIPIRAMIDI ROMBICHE
MINERALI CARATTERISTICI PIU' COMUNI	zolfo, aragonite, crisoberillo, cerussite, topazio, celestina, antimonite, olivine
PROIEZIONE STEREOGRAFICA DEGLI ELEMENTI DI SIMMETRIA SUL PIANO (001)	

2 ^a CLASSE	3 ^a CLASSE
DOMATICA	SFENOIDALE
P	A ₂ (p)
PEDI ant. {100} post. {$\bar{1}00$} PINACOIDE (LATERALE) PEDI sup. {001} inf. {$00\bar{1}$} DOMI sup. {0kl} inf. {$0k\bar{l}$} PEDI sup. {h0l} inf. {$h0\bar{l}$} DOMI ant. {hk0} post. {$\bar{h}k0$} DOMI ant. {hkl} post. {$\bar{h}kl$}	PINACOIDE PEDI d. {010} s. {$0\bar{1}0$} PINACOIDE SFENOIDI d. {0kl} s. {$0\bar{k}l$} PINACOIDI SFENOIDI d. {hk0} s. {$h\bar{k}0$} SFENOIDI d. {hkl} s. {$h\bar{k}l$}
hilgardite, clinoedrite, nettunite, yugawaralite, afwillite	artinite, alotrichite, mesolite, baritocalcite, armotomo
	

GRUPPO TRIMETRICO
SISTEMA TRICLINO ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$)
 caratteristica $a \neq b \neq c$
 faccia fondamentale $a:b:c = \frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}$ [$\frac{a}{b} \geq 1 ; \frac{c}{b} \geq 1$]

SIMBOLI DELLE FORME SEMPLICI	1 ^a CLASSE	2 ^a CLASSE
	PINACOIDALE	PEDIALE
	C	---
{ 100 }	PINACOIDE I (ANTERIORE)	PEDI
{ 010 }	PINACOIDE II (LATERALE)	PEDI
{ 001 }	PINACOIDE III (BASALE)	PEDI
{ 0kl }	PINACOIDI (PARALLELI A x)	PEDI
{ h0l }	PINACOIDI (PARALLELI A y)	PEDI
{ hk0 }	PINACOIDI (PARALLELI A z)	PEDI
{ hkl }	PINACOIDI	PEDI
MINERALI CARATTERISTICI PIU' COMUNI	albite, andritite, axinite, rodonite wollastonite, cianite, calcantite	parahilgardite, emiedrite khuniite, baumhauerite
PROIEZIONE STEREOGRAFICA SUL PIANO NORMALE z		

BIBLIOGRAFIA

- M. J. BUERGER - Elementary Crystallography - J. Wiley & Sons, inc. New York (1956).
- P. TERPSTRA, L.W. COOD - Crystallography - Longmans, London (1961).
- H. MILTON - Mathematical Crystallography - Dover publications - New York (1963).
- F. C. PHILLIPS - An introduction to Crystallography - Longmans, London (1963).
- A.C. BISHOP - An outline of Cristal Morphology - Hutchinson, London (1967).
- E. FLINT - Principe de Cristallographie - Edition Mir. Mosca (1968).
- S. BONATTI, M. FRANZINI - Cristallografia mineralogica - Boringhieri, Torino (1972.).
- G. RIGAULT - Simmetrie e Cristalli - Loescher, Torino (1979).
- Y. SIROTINE, M. CHASKOLSKAIA . Fondement de la Phisique des cristaux-edition Mir Mosca (1984).
- M. BOLOGNESI, A. CODA, G. GIACOVAZZO, G. GILLI, F. SCORDARI, D. VITERBO
Introduzione alla Cristallografia moderna - Laterza, Bari (1985).
- C.M. GRAMACCIOLI - Il meraviglioso mondo dei cristalli - Calderini, Bologna (1986).
- A. MOTTANA - Fondamenti di Mineralogia geologica - Zanichelli, Bologna (1988).



ERRATA CORRIGE: a pag. 25 nella fig. 19 nel disegno con la didascalia A_6 $6A_2$ vanno considerati soltanto 6 assi lineari.

INDICE

Presentazione

Prefazione

La Cristallografia	Pag. 5
La Cristallofisica	" 9
La Cristallochimica	" 11
La Cristallografia morfologica	" 12
Le leggi fondamentali della Cristallografia	" 15
La rappresentazione dei cristalli	" 16
La legge della costanza della simmetria e le operazioni di simmetria	" 19
Orientamento dei cristalli e legge della razionalità degli indici	" 27
Legge delle zone cristalline	" 30
Il calcolo cristallografico	" 35
Legge dei limiti cristallografici	" 35
Forme semplici	" 37
Forme aperte e forme chiuse	" 39
Forme coniugate	" 39
Forme composte	" 41
Sistematica delle forme semplici	" 42
Tabelle delle classi	" 43
Bibliografia	" 61

